

MODELISATION
des
RISQUES
- les ondes et l'environnement -
(Version Provisoire)

Alain LE ROUX, Université BORDEAUX1

13 septembre 2007

LA MODELISATION

L'objectif de cet ouvrage consiste à procurer des techniques de modélisation mathématique qui n'utilisent qu'un niveau de mathématiques limité à celui d'un quatrième semestre d'une licence scientifique : quelques notions de calcul différentiel et d'intégration sont indispensables, comme les développements limités, les dérivées partielles ou les primitives, quelques notions d'algèbre linéaire (matrices, valeurs et vecteurs propres) également. A l'inverse, les applications étudiées ici permettent de mieux assimiler ces notions, dans le cadre d'une application concrète plutôt que dans le cadre abstrait habituel dans un cours classique de mathématiques. Il reste cependant quelques rares passages exigeant un niveau plus élevé, pour mieux comprendre un point de détail plus précis, et qui ne sont pas indispensables à la compréhension globale du texte.

Les applications concernent des secteurs très différents, allant de l'hydraulique, des sciences de l'environnement, au trafic routier, puis aux sciences économiques et sociales. L'unité de l'ensemble est cependant assurée par la technique de modélisation qui se focalise sur des outils bien précis et en nombre réduit : les systèmes d'ondes, ou en langage mathématique, les systèmes hyperboliques. Il s'agit la plupart du temps de modèle non linéaires et non homogènes, mais nous verrons qu'ils peuvent quelquefois se réduire assez naturellement, et localement, en des modèles linéaires homogènes plus faciles à manipuler.

LES RISQUES ET LES ONDES

Il y a les risques que l'on prend, et les risques que l'on subit. Dans la prise de risque, lors d'une décision par exemple, on doit avoir conscience des effets colatéraux que l'on peut faire prendre aux autres, ou à soi même plus tard. On peut considérer que le décideur est, à un instant donné, la source ou le point de départ d'une certaine entité, qui va se propager, comme une onde, et éventuellement interagir avec le milieu rencontré. Par exemple, lorsqu'un financier lance un emprunt il prend le risque de perdre de l'argent ou d'en faire perdre à d'autres, ailleurs et plus tard. Parmi les risques que l'on subit, il y a bien sûr les risques naturels, et ceux liés aux décisions des autres. On peut encore interpréter le risque comme une onde, qui vous arrive dessus, subitement, en venant d'on ne sait où.

Il peut être jugé opportun et quelquefois indispensable, d'évaluer la prise de risque, et de ce point de vue, la **modélisation des risques** est un moyen d'investigation efficace et rapide. Elle devient incontournable lorsqu'on manque de données et de mesures expérimentales, ce qui est le cas particulièrement pour l'étude des catastrophes naturelles, telles que les cyclones ou certains phénomènes rares en hydraulique, les tsunamis, les vagues scélérates ou Rogue waves par exemple. Elle permet également d'introduire un facteur de comportement humain, qui permettra d'évaluer la réaction à l'impact d'une décision. Dans ces cas, la modélisation se base et s'argumente sur des observations qualitatives, en nombre réduit quelquefois. Elle va cependant apporter un complément indispensable au manque de données de mesures expérimentales, en apportant des résultats que l'on qualifiera de crédibles ou non, qu'on pourra reprendre et corriger, jusqu'à obtenir un résultat, donc un modèle crédible finalement.

Table des matières

1	Introduction à la Modélisation	8
1.1	La démarche	8
1.2	Un premier exemple : une réaction chimique	9
1.2.1	Le calcul analytique direct	10
1.2.2	La résolution numérique	11
1.2.3	Un exemple concret : le bouclier thermique d'un véhicule spatial	14
1.3	Un exemple en biologie : la dynamique des populations	17
1.4	Un exemple en mécanique : la boule de pétanque.	19
1.5	Un prêt bancaire à taux variable	22
1.6	Les hypothèses mathématiques	24
1.7	Quelques généralités sur les méthodes numériques	27
1.8	Conclusion	30
2	La Modélisation d'une onde	31
2.1	Qu'est ce qu'une onde ?	31
2.2	L'équation d'onde	32
2.2.1	L'exemple fondamental : l'équation des ondes	32
2.3	Quelques exemples d'ondes	34
2.3.1	Un produit financier	34
2.3.2	L'âge d'une population	35
2.3.3	Le trafic routier	36
2.3.4	L'équation de Burgers	38
2.4	Les caractéristiques	40
2.5	Les champs conservatifs et les chocs	42
2.5.1	Exemples, pour l'équation de Burgers	44
2.5.2	Caractérisation des chocs : la condition d'entropie	47
2.5.3	L'unicité	48
2.6	La discrétisation des équations d'ondes	50
2.6.1	Quelques schémas aux différences finies	50
2.6.2	Une méthode de volumes finis	52
2.6.3	Un dernier exemple	56
3	Des ondes moins classiques	59
3.1	Quelques applications en économie	59
3.1.1	Les équations de Black-Scholes à faible volatilité	59

3.1.2	Les effets colatéraux des modifications de la T.V.A.	63
3.1.3	La fuite des contribuables	68
3.2	Les équations d'Hamilton-Jacobi	71
3.2.1	L'exemple de la combustion	71
3.2.2	La formule de Hopf et Lax	77
3.2.3	Les courbes isovaleurs (level sets)	89
3.3	Les réactions transportées	94
3.3.1	Réactions chimiques et polluants	95
3.3.2	Le vent, les pollens, la phéromone	97
3.3.3	Dynamique de populations : les bactéries, les ravageurs, l'élevage	100
3.3.4	Les questions de santé : évolution d'une maladie	103
3.3.5	Les mouvements de foules	106
4	Les systèmes à plusieurs ondes	110
4.1	Les systèmes hyperboliques	110
4.2	L'exemple de référence : l'équation des ondes	113
4.3	Les systèmes physiques d'ordre 2	115
4.3.1	Le système de Saint-Venant	119
4.3.2	Les équations d'Euler en hydrodynamique	120
4.3.3	Un exemple académique	120
4.3.4	Le trafic routier	121
4.3.5	A propos des équations d'ondes (scalaires)	122
4.4	Les systèmes physiquement réalistes à trois ondes	123
4.4.1	Application à l'hydrodynamique	125
4.4.2	Application à l'hydraulique	126
4.5	Résolution des systèmes hyperboliques homogènes	127
4.5.1	Le découplage	127
4.5.2	Les invariants de Riemann	129
4.5.3	Un exemple : la rupture d'un barrage sur un fond plat	131
4.6	Les ondes de choc	132
4.6.1	L'exploitation des relations de Rankine-Hugoniot	132
4.6.2	Retour à la rupture de barrage	134
4.6.3	Choc ou onde de raréfaction ?	137
4.6.4	Le tube à choc de Sod	138
4.6.5	Courbes de chocs et invariants	140
4.7	Les chocs en détonique	142
4.7.1	Le processus expérimental	143
4.7.2	L'exploitation des résultats expérimentaux	144
5	Les termes sources, l'exemple de l'hydraulique	150
5.1	Introduction	150
5.2	Le calcul des ondes sources	151
5.3	L'analyse dans le plan de phase	154
5.3.1	Analyse pour les profils réguliers	154
5.3.2	Analyse pour les chocs	159

5.4	De l'écoulement de l'air à l'acoustique : la génération du son	162
5.5	Ainsi coule une rivière	168
5.6	La modélisation des Roll Waves	171
5.7	La modélisation des Rogue Waves	174
5.7.1	La configuration initiale du modèle	175
5.7.2	L'évolution du profil	177
5.7.3	Interprétation graphique dans le plan de phase	180
5.8	La modélisation du mascaret	181
5.9	L'eau vive et l'eau dormante : les lacs et le littoral	182
5.9.1	Les vagues de surf	182
6	Cyclones et Tourbillons	183
6.1	Le référentiel cartographique	183
6.2	Les équations du vent : des Alizés au Pot-au-noir	186
6.3	Calcul des trajectoires des cyclones	193
6.4	L'oeil du cyclone	196
6.5	Les tornades et tourbillons	205
7	Les tsunamis	209
7.1	La génération du tsunami.	209
7.1.1	L'effet du séisme : une application de la détonique.	209
7.1.2	La modélisation conservative $q - m$	210
7.1.3	Le calcul du profil, et l'importance de la friction	213
7.1.4	L'onde sismique et l'équilibre géostrophique	215
7.1.5	L'effet de seuil : une vague ou pas ?	219
7.1.6	La propagation en trois dimensions	223
7.2	La propagation de la vague	226
7.2.1	La propagation au large	226
7.2.2	L'arrivée sur le littoral	226
7.3	D'autres sources de vagues	226
7.3.1	Les avalanches sous marines	226
7.3.2	Les ronds dans l'eau	226
8	Les ondes de rupture	228
8.1	Le modèle de rupture	228
8.2	L'avalanche	232
8.2.1	Le front de l'avalanche	233
8.2.2	Le dos de l'avalanche	235
8.2.3	La phase d'arrêt	235
8.3	L'effondrement d'un building	235
8.4	La goutte d'eau	235
8.5	Les phénomènes de Flash flooding : pluie cévenole et inondations	235
8.6	La rupture de barrage sur une pente	235
8.7	La coulée de boue	236

9	Les problèmes à fortes contraintes	237
9.1	Les modèles vitesse-pression	237
9.1.1	Impact en mer	237
9.1.2	Les problèmes d'adduction d'eau : repérage des fuites et coup de bélier . . .	237
9.2	Le comportement des conducteurs en trafic routier	241
9.2.1	La construction du modèle	241
9.2.2	Le calcul des profils	244
9.3	Le traitement numérique : les schémas "équilibre" ou "well balanced"	246
9.3.1	Les caractéristiques rétrogrades	246
9.3.2	Les schémas à profils stationnaires	246
9.3.3	La réduction de la diffusion numérique	246
10	Bibliographie	247
10.1	Développement chapitre par chapitre	247
10.2	Liste des références	247

Chapitre 1

Introduction à la Modélisation

1.1 La démarche

La modélisation consiste à traduire en langage mathématique la description d'une observation, d'un phénomène ou d'une hypothèse concernant un évènement de la réalité. Ce langage mathématique est essentiellement constitué d'équations qui représentent des lois physiques (de conservation, par exemple) ou des lois d'état et des données issues d'observations ou de mesures expérimentales ou de simples évaluations prospectives proposées a priori. Plus la description est fine et plus le nombre de paramètres à prendre en compte est important, et plus le **modèle mathématique**, c'est à dire cet ensemble d'équations, de lois d'état et de données, devient complexe, et la résolution en devient aussi d'autant plus délicate. Cette **complexité** impose la plupart du temps l'assistance d'un matériel de calcul (informatique) et il devient nécessaire d'adapter le modèle mathématique, de le modifier éventuellement, pour en faire un **modèle numérique** qui pourra être traité par l'informatique. Le **calcul scientifique** a pour objet d'effectuer cette adaptation, et de mener à terme les calculs en machine. A ce niveau, la tâche la plus classique consiste à transformer le modèle mathématique **continu** en un modèle numérique **discret**, ou **modèle discret**. On parle alors de **discrétisation**. Pour un modèle continu donné, il y a bien entendu de multiples techniques de discrétisation possibles, qui ne vont pas toutes donner des résultats de même qualité. Le choix de la technique de discrétisation se fait en fonction de plusieurs critères, le premier étant certainement la propre culture scientifique et la compétence du modélisateur, qui ne pourra proposer que les techniques qu'il connaît suffisamment. Le second critère est de nature économique, au sens large, puisque par exemple la durée du calcul fait partie de son coût, et l'exigence d'une meilleure qualité correspond souvent à un coût plus élevé. On ne peut pas toutefois s'autoriser des temps de calcul trop importants. Ainsi, par exemple, si on demande plus de 24 heures de calcul pour prévoir la météo du lendemain, ce calcul est complètement inutile...

La qualité d'un résultat relève de deux propriétés essentielles. La première va assurer que le résultat obtenu correspond bien à ce que l'on attend, c'est à dire une approximation de la solution du modèle mathématique initial ; on l'appelle la **consistance**, mais on aurait pu aussi bien l'appeler la crédibilité. La seconde va mesurer la qualité de cette approximation. Il s'agit de la **précision**, qui s'évalue en terme d'**ordre de précision**. A ces deux propriétés il convient d'ajouter une troisième,

qui va assurer que le calcul numérique pourra être mené jusqu'à son terme, sans provoquer de situation incompatible avec le fonctionnement de la machine (overflow ou dépassement de capacité, division par zéro, etc.) ; il s'agit de la **stabilité**.

On parlera ensuite de **convergence** lorsque l'on assure le passage à la limite de la solution du modèle numérique (discret) vers la solution du modèle mathématique (continu) quand le paramètre de discrétisation tend vers zéro, ce qui signifie que cette discrétisation est imaginée devenir de plus en plus fine. Bien évidemment, il ne s'agit ici que d'une démarche abstraite de mathématicien, en pratique ce paramètre de discrétisation est fixé pour un calcul donné ; le résultat obtenu correspond à ce niveau fixé du paramètre de discrétisation, et devra être exploité comme tel, en se disant qu'il est rassurant de savoir qu'il n'est pas trop éloigné de la solution du modèle mathématique lorsqu'il y a convergence.

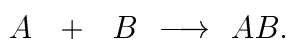
La **démarche** de modélisation comprend ainsi plusieurs étapes :

- la **construction du modèle mathématique**,
- l'**analyse** de ce modèle mathématique,
- la **discrétisation** de ce modèle mathématique pour en faire un modèle numérique,
- l'**analyse** du modèle numérique (stabilité, consistance),
- la **résolution** du modèle numérique (programmation informatique),
- la **validation** et l'**exploitation** des résultats.

Les quatre derniers points correspondent au **calcul scientifique**. L'étape de validation va par exemple consister à tester le programme de calcul sur des cas-tests dont on connaît déjà les résultats pour en vérifier le bon fonctionnement. Cette étape est nécessaire, avant l'exploitation sur d'autres cas pour lesquels les résultats recherchés ne sont bien entendu pas connus a priori, même si on peut en prévoir les grandes lignes lorsqu'on a acquis une expérience personnelle suffisante sur le sujet.

1.2 Un premier exemple : une réaction chimique

Deux produits notés A et B se combinent pour constituer un nouveau produit AB , selon la formule chimique



Cette réaction n'est pas instantanée, et bien entendu, elle va s'arrêter lorsque l'un des deux produits A ou B viendra à manquer. On note $u(t)$ le nombre de moles d'élément A présentes à l'instant t , et $v(t)$ le nombre de moles de l'élément B présentes au même instant t . A l'instant initial, c'est à dire pour $t = 0$, on doit décrire la situation, par exemple en proposant

$$u(0) = u_0 \quad , \quad v(0) = v_0 \quad ,$$

où $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ sont deux nombres réels positifs donnés. Il s'agit des **données initiales**.

La réaction va produire des moles de produit AB dont le nombre à l'instant t sera noté $w(t)$; on peut penser qu'à l'instant initial ce produit AB n'est pas présent, et écrire

$$w(0) = 0 \quad ,$$

ce qui constitue une autre donnée initiale.

La construction du modèle consiste à chaque instant à effectuer un bilan de la situation en fonction des situations connues aux instants précédents. On va ainsi comparer deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$ réputé "petit", et décrire l'accroissement du nombre de moles de produit AB , $w(t)$, à partir d'un prélèvement sur les stocks $u(t)$ et $v(t)$ des produits A et B respectivement, en fonction d'un **coefficient de production** notée K ($K > 0$, supposé constant pour l'instant). On obtient

$$w(t + \Delta t) = w(t) + K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega(\Delta t)$$

où $\omega(\Delta t)$ est un **module de continuité**, c'est à dire une fonction de Δt qui tend vers zéro lorsque Δt tend vers zéro. Il nous faut aussi actualiser les stocks $u(t)$ et $v(t)$, en écrivant

$$u(t + \Delta t) = u(t) - K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega_1(\Delta t), \quad v(t + \Delta t) = v(t) - K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega_2(\Delta t),$$

où on a introduit deux nouveaux modules de continuité $\omega_1(\Delta t)$ et $\omega_2(\Delta t)$.

En divisant chacune de ces équations par Δt puis en passant à la limite lorsque Δt tend vers zéro, on obtient le système différentiel suivant, constitué de trois équations :

$$u' + K u v = 0, \quad v' + K u v = 0, \quad w' - K u v = 0.$$

La donnée de ce système et des conditions initiales u_0 et v_0 constituent notre modèle mathématique. On peut immédiatement remarquer les deux relations suivantes :

$$u' + w' = 0, \quad v' + w' = 0$$

qu'on peut intégrer immédiatement pour obtenir, à chaque instant t ,

$$u(t) + w(t) = u_0, \quad v(t) + w(t) = v_0.$$

Ces deux relations s'interprètent comme un principe de Lavoisier, de conservation des atomes de chacun des éléments A et B , bien connu en chimie. Il est impératif que ce principe soit respecté lors de la résolution du modèle.

1.2.1 Le calcul analytique direct

On peut résoudre directement ce système différentiel, en exprimant u et v en fonction de w dans la troisième équation, ce qui donne l'équation différentielle suivante

$$w' = K (u_0 - w) (v_0 - w),$$

qui s'intègre facilement ; on obtient

$$w(t) = \frac{u_0 v_0 (e^{Kt(u_0 - v_0)} - 1)}{u_0 e^{Kt(u_0 - v_0)} - v_0} \quad \text{si } u_0 \neq v_0,$$

ou

$$w(t) = \frac{K u_0^2 t}{1 + K u_0 t} \quad \text{si } u_0 = v_0.$$

On en déduit ensuite $u(t) = u_0 - w(t)$, et $v(t) = v_0 - w(t)$ dans chaque cas.

En pratique la constante K peut être très grande, quand le mélange est explosif par exemple, et dans ce cas, l'évaluation de l'exponentielle peut poser des problèmes : si $u_0 > v_0$, l'expression $e^{Kt(u_0-v_0)}$ est très grande et on ne disposera pas d'assez de chiffres significatifs en machine pour en retrancher 1. On a l'effet analogue si $u_0 < v_0$, le nombre 1 étant alors très grand devant l'exponentielle. Cette expression est ainsi difficile à exploiter graphiquement par exemple, pour étudier la phase transitoire, c'est à dire avant d'atteindre pour $w(t)$ la valeur asymptotique $\min(u_0, v_0)$.

1.2.2 La résolution numérique

La résolution numérique exige une discrétisation du temps. On introduit un paramètre de discrétisation Δt qui correspond à un petit accroissement en temps, c'est à dire une durée petite devant l'échelle de temps du phénomène, et on va approcher la solution aux instants $t_n = n \Delta t$, avec $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire construire des valeurs u^n, v^n, w^n proches de $u(t_n), v(t_n), w(t_n)$ respectivement. On peut utiliser la **méthode** suivante

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^n v^n,$$

qui s'inspire directement du bilan décrit lors de la construction du modèle mathématique, et de la même façon,

$$u^{n+1} = u^n - K \Delta t u^n v^n, \quad v^{n+1} = v^n - K \Delta t u^n v^n.$$

La donnée de $w^0 = 0, u^0 = u_0, v^0 = v_0$ permet de calculer w^1, u^1, v^1 et de proche en proche, on construit tous les autres w^n, u^n, v^n , jusqu'à un certain numéro $n = N$ fixé à l'avance pour lequel on a décidé d'arrêter le calcul, par exemple une valeur $N = \frac{T_{max}}{\Delta t}$.

On observe que le nombre d'atomes de chaque élément est bien conservé ; en effet,

$$w^{n+1} + u^{n+1} = w^n + u^n = \dots = u_0, \quad w^{n+1} + v^{n+1} = w^n + v^n = \dots = v_0.$$

On doit aussi s'inquiéter de propriétés plus triviales, comme la **positivité** de ces nombres de moles ; on a en effet

$$u^{n+1} = u^n (1 - K \Delta t v^n), \quad v^{n+1} = v^n (1 - K \Delta t u^n).$$

La positivité de u^n ou de v^n ne peut être assurée que sous les conditions

$$\Delta t \leq \frac{1}{K u_0}, \quad \Delta t \leq \frac{1}{K v_0}.$$

Ceci constitue une **condition de stabilité**. Elle peut être très contraignante lorsque le coefficient de production K est grand, ainsi que lorsque l'un (au moins) des nombres u_0 ou v_0 . Elle exige le choix d'une petite valeur de Δt ce qui va multiplier les calculs nécessaires pour atteindre un temps d'arrêt T_{max} fixé à l'avance.

On peut décider de remplacer la méthode précédente par la suivante. On commence par calculer u^{n+1} et v^{n+1} par

$$u^{n+1} = u^n - K \Delta t u^{n+1} v^{n+1}, \quad v^{n+1} = v^n - K \Delta t u^{n+1} v^{n+1},$$

puis w^{n+1} par

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^{n+1} v^{n+1}.$$

A première vue, cette méthode semble peu différente de la précédente, mais il y a en fait une différence fondamentale : les formules ne sont plus **explicites** mais **implicites**, et cela va nécessiter la résolution préalable d'au moins une équation. On commence par évaluer u^{n+1} , en remarquant que

$$u^{n+1} - v^{n+1} = u^n - v^n ,$$

d'où $v^{n+1} = u^{n+1} - u^n + v^n$. On obtient que u^{n+1} est une racine du polynôme du second degré

$$K \Delta t X^2 + (1 + K \Delta t (v^n - u^n)) X - u^n = 0 .$$

Il est immédiat que si la positivité de u^n est acquise (c'est vrai pour $n = 0$), ce polynôme admet deux racines réelles, et on retiendra celle ci :

$$u^{n+1} = \frac{1}{2 K \Delta t} \left(\sqrt{(1 + K \Delta t (v^n - u^n))^2 + 4 K \Delta t u^n} - (1 + K \Delta t (v^n - u^n)) \right)$$

parce qu'elle est positive, et ne diverge pas lorsque Δt tend vers zéro. Ce qui n'est pas le cas de l'autre racine.

Une fois u^{n+1} évalué, on obtient v^{n+1} par

$$v^{n+1} = u^{n+1} - u^n + v^n$$

qui donne également un résultat positif. Il faut noter que la positivité de u^{n+1} et donc aussi celle de v^{n+1} est assurée **sans aucune restriction sur Δt** même lorsque K est grand.

Enfin, l'évaluation de w^{n+1} est immédiate en reprenant la formule

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^{n+1} v^{n+1}.$$

On aurait pu tout aussi bien travailler directement avec w^{n+1} , en remarquant que

$$w^{n+1} + u^{n+1} = w^n + u^n , \quad w^{n+1} + v^{n+1} = w^n + v^n .$$

On obtient

$$w^{n+1} - w^n = K \Delta t (u^n + w^n - w^{n+1}) (v^n + w^n - w^{n+1}) ,$$

et en posant

$$X_n = w^{n+1} - w^n ,$$

on observe que X_n est une racine du polynôme du second degré

$$K \Delta t X_n^2 - (1 + K \Delta t (u^n + v^n)) X_n + K \Delta t u^n v^n = 0 .$$

On pose

$$\Delta_n = (1 + K \Delta t (u^n + v^n))^2 - 4 K^2 \Delta t^2 u^n v^n ,$$

qui est toujours positif si u^n et v^n le sont, toujours sans aucune restriction dans le choix de Δt . On retiendra ensuite la racine

$$X_n = \frac{1}{2 K \Delta t} \left(1 + K \Delta t (u^n + v^n) - \sqrt{\Delta_n} \right) ,$$

qui est positive, et surtout qui ne diverge pas lorsque Δt tend vers zéro.

La méthode numérique correspond aux différentes étapes suivantes

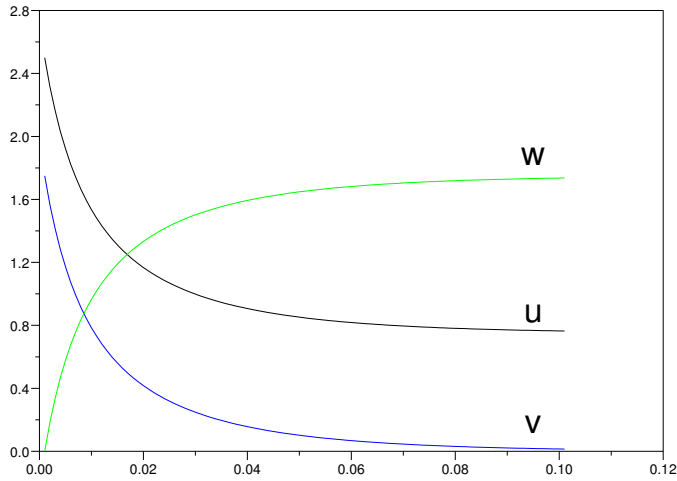
$$\text{Calculer } \Delta_n , \quad \text{puis } X_n ,$$

par les formules précédentes, puis calculer

$$w^{n+1} = w^n + X_n , \quad u^{n+1} = u^n - X_n , \quad v^{n+1} = v^n - X_n .$$

On vérifie assez facilement que ces trois quantités sont positives.

La figure suivante représente les résultats numériques obtenus en programmant cette méthode, avec $K = 50$, $u_0 = 2.5$, $v_0 = 1.75$ et un temps maximal de 0.1, avec $\Delta t = 0.001$.



On observe une première phase transitoire qui se stabilise en un état stationnaire lorsque l'un des éléments, ici B , vient à manquer.

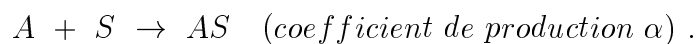
Imaginons maintenant que ce coefficient de production K dépende du temps ou de la solution, et que par exemple cette dépendance soit tabulée, à partir de mesures expérimentales. Le

calcul analytique n'est plus possible, tandis que, moyennant une adaption élémentaire, la méthode numérique va continuer à fonctionner. Il suffira de remplacer K par une expression de la forme $K_n = K(t_n, u^n, v^n, w^n)$ dans l'instruction correspondante du programme.

En résumé, le calcul analytique nous permet d'obtenir dans des cas très particuliers la solution exacte, donnée par une formule mathématique. Ceci peut être très utile pour valider un programme : on peut comparer cette solution analytique au résultat du calcul. La généralisation à des cas complexes n'est plus possible pour le calcul analytique, mais l'est à peu de frais pour le calcul numérique, en toute confiance, le programme ayant déjà été validé. Par contre, le résultat n'est qu'un tableau de nombres, ou ici un simple graphe représentant ce tableau ; on n'a plus une formule mathématique. On note aussi qu'il y a plusieurs choix de méthodes numériques adaptées, certaines (explicites en général) exigeant des contraintes sur le paramètre de discrétisation et d'autres pas. On a vu aussi que pour une méthode donnée, il peut y avoir plusieurs façons de la mettre en oeuvre numériquement. Enfin, on doit aussi remarquer que la résolution explicite devait distinguer les cas où $u_0 \neq v_0$ des cas où $u_0 = v_0$, ce qui n'est pas nécessaire pour aucune des méthodes numériques envisagées ici.

1.2.3 Un exemple concret : le bouclier thermique d'un véhicule spatial

Pendant sa phase de retour, un véhicule spatial doit absolument être muni d'un bouclier thermique pour éviter la surchauffe et la désintégration lorsqu'il pénètre les couches denses de l'atmosphère. Ces boucliers sont actuellement conçus en matériau composite, pour conserver une bonne efficacité sans trop pénaliser la mission par une forte masse. En phase de réentrée, la vitesse est très rapide, supérieure à 5 fois la vitesse du son, soit plus de 5000 km/h, ce qui provoque la formation d'un choc qui précède de quelques mètres le véhicule, et s'y maintient tant que la vitesse reste élevée. Pendant cette phase, les molécules d'azote N_2 ou d'oxygène O_2 sont éclatées en deux atomes N ou O , suivant le cas, qui peuvent être adsorbés par la surface du bouclier, c'est à dire s'y introduire, puis réagir avec des éléments métalliques du bouclier et s'en libérer en en prélevant au passage une certaine quantité d'énergie, et s'opposer ainsi à une trop forte accumulation de la chaleur. En notant A l'atome libre N ou O , puis S un atome métallique de la surface du bouclier, l'**adsorption atomique** est décrite par la réaction chimique



On retrouve exactement la situation décrite précédemment. On observe cependant une recombinaison dite **recombinaison d'Eley-Rideal**, qui correspond à la réaction chimique



On note $u(t)$ le nombre de moles de A à l'instant t , avec $u(0) = u_0$ (> 0 donné), puis de la même façon $v(t)$ le nombre de moles de S avec $v(0) = v_0$ (> 0 donné), puis $w(t)$ le nombre de moles de AS avec $w(0) = 0$ et enfin $z(t)$ le nombre de moles de A_2 avec $z(0) = z_0$ (≥ 0 donné). Les équations représentant la réaction sont obtenues en faisant un bilan de chaque nombre de moles, comme précédemment. On obtient

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\alpha u(t) v(t) - \beta u(t) w(t) , \\ v'(t) &= -\alpha u(t) v(t) + \beta u(t) w(t) , \\ w'(t) &= -\beta u(t) w(t) + \alpha u(t) v(t) , \\ z'(t) &= \beta u(t) w(t) . \end{aligned}$$

On se place en un point proche du bouclier, donc suffisamment distant du choc qui produit les éléments A . La conservation des atomes (principe de Lavoisier) fournit deux intégrales premières. La conservation des atomes S donne

$$v'(t) + w'(t) = 0 \quad , \quad d'où \quad v(t) + w(t) = v_0 \quad .$$

La conservation des atomes A donne

$$2 z'(t) + u'(t) + w'(t) = 0 \quad , \quad d'où \quad 2 z(t) + u(t) + w(t) = 2 z_0 + u_0 \quad .$$

On se donne ensuite un pas de discrétisation Δt , et on pose $t_n = n \Delta t$ pour tout n entier et on note respectivement u_n, v_n, w_n, z_n les approximations de $u(t_n), v(t_n), w(t_n), z(t_n)$ évaluées par le schéma suivant :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \Delta t (\alpha v_n + \beta w_n)} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{v_n + \beta \Delta t v_0 u_n}{1 + \Delta t (\alpha + \beta) u_n} \quad ,$$

$$w_{n+1} = v_0 - v_{n+1} \quad , \quad z_{n+1} = z_0 + \frac{1}{2} (u_0 - u_{n+1} - w_{n+1}) \quad .$$

Les deux dernières formules de ce schéma traduisent exactement la conservation des nombres d'atomes A et S .

Ce schéma conserve la positivité de chaque nombre de moles. En effet, supposons que pour un n donné on ait $u_n \geq 0$, $w_n \geq 0$, $z_n \geq 0$, ainsi que

$$v_n \geq \frac{\beta v_0}{\alpha + \beta} \quad ,$$

ce qui est bien le cas pour $n = 0$. On montre qu'alors ceci reste vrai au niveau $n + 1$. On a

$$v_{n+1} \geq \frac{\beta v_0 (1 + \Delta t (\alpha + \beta) u_n)}{(\alpha + \beta) (1 + \Delta t (\alpha + \beta) u_n)} = \frac{\beta v_0}{\alpha + \beta} \quad .$$

On en déduit immédiatement que

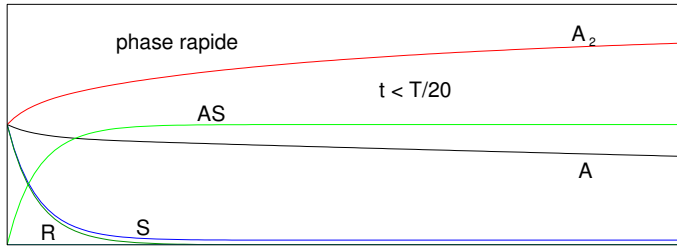
$$v_{n+1} \leq v_n \quad , \quad puis \quad w_{n+1} \geq w_n \quad .$$

On en déduit ensuite

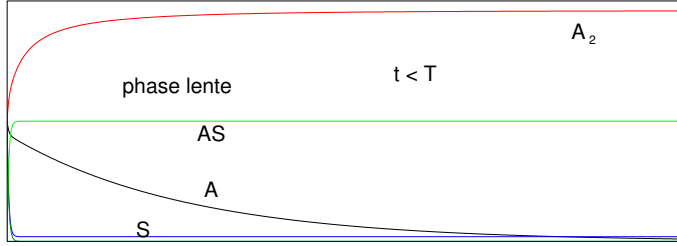
$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{1 + \Delta t \alpha v_n} \leq \frac{u_n}{1 + \Delta t \frac{\alpha \beta v_0}{\alpha + \beta}} < u_n \quad .$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes et minorées, donc convergent. C'est donc aussi le cas de $w_n = v_0 - v_n$ et de $z_n = u_0 + \frac{1}{2} (u_0 - u_n - v_n)$. On vient de montrer qu'un comportement asymptotique est toujours réalisé.

Les tests numériques expérimentés confirment ce résultat, comme le montre la figure ci dessous.



Evolution de la réaction



On observe, indépendamment des valeurs respectives des taux de production α et β , que la réaction peut se décomposer en deux phases. Une phase rapide, où $v(t)$ et $w(t)$ se stabilisent, puis une phase lente qui correspond à la stabilisation de $z(t)$ puis de $u(t)$. La quantité $R(t) = \alpha v(t) - \beta w(t)$ se stabilise lors de la phase rapide et sa limite caractérise les valeurs asymptotiques. On a,

$$R_n = \alpha v_n - \beta w_n = (\alpha + \beta) v_n - \beta v_0 \geq 0,$$

d'après l'estimation d'un minorant de v_n . Le rapport entre α et β est ici $\frac{\alpha}{\beta} = 25$, et les quantités représentées sont des nombres de moles rapportées à une quantité de référence, soit initiale ou maximale. Pour d'autres valeurs relatives de α et de β , l'allure reste la même, les différences portant essentiellement sur la vitesse de convergence et les valeurs asymptotiques. Les valeurs initiales u_0 , v_0 et z_0 sont relativement grandes, et d'inévitables erreurs d'arrondis dues au calcul restent sensibles au niveau de la stabilisation. Ainsi la quantité R_n théoriquement non négative peut devenir très légèrement négative, passant d'un nombre très grand (ici $25 \cdot 10^6$) à un nombre très petit (ici $-1.4 \cdot 10^{-9}$). Cette étude permet d'évaluer la quantité de métal S qui doit être disponible pour la phase de retour, sans surcharger inutilement le bouclier, et donc la masse totale au départ.

1.3 Un exemple en biologie : la dynamique des populations

On imagine un espace fermé, où vivent deux espèces d'animaux. Il s'agit bien entendu d'une supposition abstraite, bien que des exemples réels aient été observés. Par exemple au sommet de Devil's Tower, dans le Wyoming, une espèce de souris et une espèce de serpents ont cohabité pendant des siècles, sans échanges avec l'extérieur compte tenu des falaises verticales entourant le site.

On note $u(t)$ le nombre d'individus de la première espèce, et $v(t)$ le nombre d'individus de la seconde espèce, à l'instant t . On suppose que la première espèce est un prédateur de la seconde. En procédant à un bilan à chaque instant comme ci dessus, on obtient le modèle mathématique suivant

$$u' = -\mu u + K u v \quad , \quad v' = -\lambda v - M u v + A(t) \quad ,$$

où μ et λ sont les coefficients de mortalité naturelle de chacune des espèces, K le coefficient d'augmentation de la population de prédateur en fonction des proies consommées, M le coefficient d'incidence de ce prélèvement sur la seconde population et $A(t)$ une ressource qu'utilise la seconde population pour se développer. Elle dépend a priori du temps (elle peut changer avec les saisons par exemple).

On ne peut pas exprimer aisément v en fonction de u afin de l'éliminer pour obtenir une seule équation en u , qui sera de toutes façons certainement difficile à intégrer analytiquement.

Une première question consiste à savoir si un état d'équilibre viable peut se produire et se maintenir, au moins lorsque A est une constante. Dans ce cas les deux dérivées u' et v' deviennent nulles et la première équation donne

$$u (K v - \mu) = 0 \quad ,$$

d'où soit $u = 0$ et il y a eu extinction des prédateurs, soit $v = \frac{\mu}{K}$. Il est intéressant de remarquer que l'équilibre de la population v ne dépend que des paramètres de ses prédateurs.

Pour la seconde équation, l'équilibre se traduit par

$$A = v (\lambda + M u) \quad ,$$

d'où compte tenu du premier équilibre pour v ,

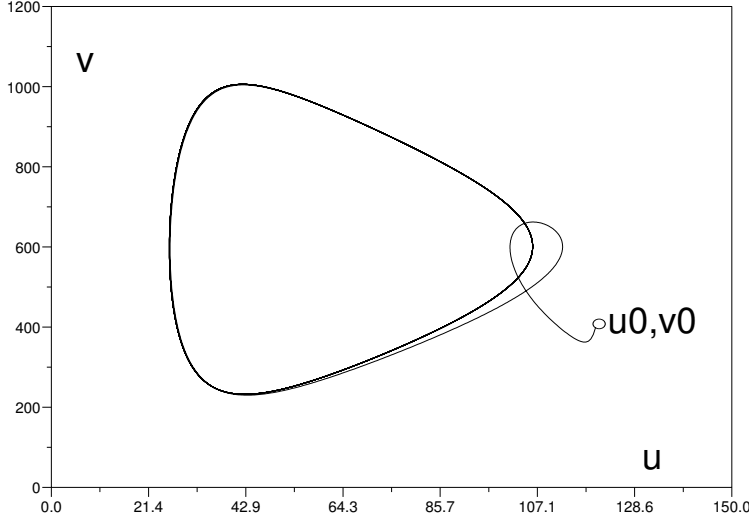
$$u = \frac{A K - \lambda \mu}{\mu M} \quad ,$$

qui doit être positif. On obtient la condition

$$A K > \lambda \mu \quad .$$

Si elle n'est pas vérifiée il y aura extinction des prédateurs. Elle est toujours vérifiée si A est assez grand, c'est à dire si la population v dispose de suffisamment de ressource, à la fois pour se développer elle même et pour subir sans trop d'inconvénients le prélèvement du prédateur.

Remarque : un exemple actuel correspond aux populations de pêcheurs et de poissons pêchés, la "mortalité" du pêcheur étant comprise comme une cessation d'activité "devenue non rentable".



L'étude élémentaire que l'on vient de faire montre qu'à terme il y aura extinction de la population du métier de pêcheur... sauf si on fournit suffisamment de ressources nutritives aux poissons.

En reprenant les mêmes notations que pour la discrétisation précédente, on propose la méthode numérique suivante :

$$u^{n+1} = u^n - \mu \Delta t u^{n+1} + K u^n v^{n+1} \Delta t \quad , \quad v^{n+1} = v^n - \lambda \Delta t v^{n+1} - M u^n v^{n+1} \Delta t + A(t_n) \Delta t \quad ,$$

qui se résoud par

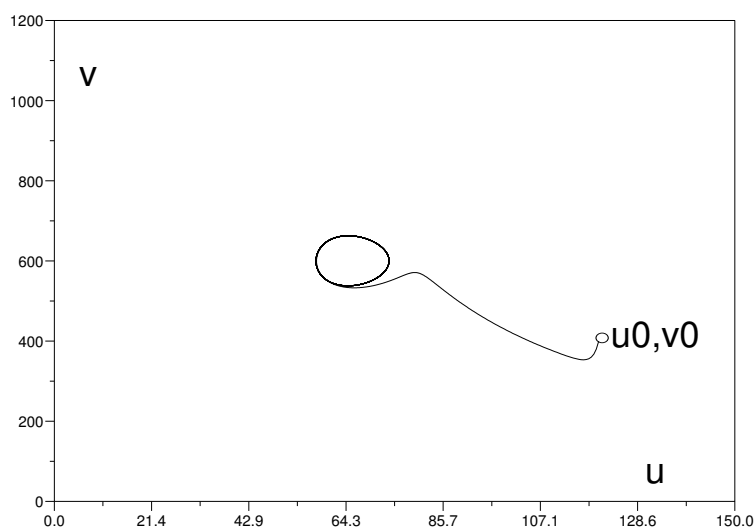
$$v^{n+1} = \frac{v^n + A(t_n) \Delta t}{1 + \lambda \Delta t + M u^n \Delta t} \quad , \quad u^{n+1} = u^n \frac{1 + K \Delta t v^{n+1}}{1 + \mu \Delta t} \quad .$$

On remarque que le choix de cette méthode offre plusieurs avantages : la positivité de u^{n+1} et la positivité de v^{n+1} sont assurées (il n'y a pas de signe " - " dans les formules de résolution), sans aucune restriction sur la taille de Δt . Il est indispensable de calculer v^{n+1} avant de calculer u^{n+1} . La figure ci dessus présente un test de cette méthode, avec les valeurs suivantes des paramètres :

$$K = 0.0002 \quad , \quad M = 0.042 \quad , \quad \mu = 0.12 \quad , \quad \lambda = 0.24 \quad , \quad A(t) = A_0 (1 + \alpha \sin(\omega t)) \quad ,$$

où $A_0 = 1800$, $\alpha = 0.75$, $\omega = 0.1$. Pendant un temps égal à 1000, on observe une première phase de transition, puis une convergence vers une courbe fermée qui correspond à un comportement périodique de la solution. Au bout du temps 1000, la solution a décrit environ 15 périodes. Lorsque le caractère saisonnier est réduit, l'amplitude de cette courbe périodique diminue. Ainsi, pour $\alpha = 0.15$, on obtient les résultats suivants, toutes choses égales par ailleurs :

On conserve un comportement périodique, dont la variation d'amplitude est plus petite. En prenant α proche de zéro, on se rapproche davantage d'une valeur asymptotique correspondant



à $u = 65.714$, $v = 600$, c'est à dire les valeurs prévues plus haut. Les valeurs de départ étaient $u_0 = 120$, $v_0 = 400$ dans chacun des cas.

1.4 Un exemple en mécanique : la boule de pétanque.

On s'intéresse au mouvement de roulement d'une boule de pétanque sur un sol plat, après l'instant de son impact sur le sol, et plus particulièrement à la position qu'elle aura adoptée une fois stabilisée. On note $x(t)$ sa position à l'instant t comptée après l'instant $t = 0$ de l'impact, et on se fixe $x(0) = 0$ pour désigner le point d'impact. En notant $v(t)$ la vitesse de la boule à l'instant t , avec $v(0) = v_0$ donné, on a, par définition de la vitesse

$$x'(t) = v(t) ,$$

et en introduisant un coefficient de friction noté k , on décrit la perte de vitesse par l'équation suivante :

$$v'(t) = -k v(t) .$$

L'intégration de ce système est immédiate, et donne d'abord

$$v(t) = v_0 e^{-kt} ,$$

et ensuite,

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) .$$

On observe que si $t \rightarrow +\infty$, cette position va converger vers le point $\frac{v_0}{k}$, qui ne sera cependant atteint qu'au bout d'un temps infini. Si on veut un arrêt de la boule avant un temps fini, on doit

par exemple modifier le terme de friction. On peut choisir de "renforcer" la puissance, en prenant pour équation de réduction de la vitesse

$$v'(t) = -k v(t)^2 ,$$

qui conduit à la solution

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + k t v_0} , \quad x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + k t v_0) .$$

On remarque que $x(t)$ tend vers l'infini avec t : la boule ne s'arrête jamais !

On propose alors une démarche inverse, en prenant comme réduction de vitesse, l'équation suivante, par exemple,

$$v'(t) = -k \sqrt{v(t)} ,$$

étant bien entendu que la vitesse $v(t)$ reste positive ou nulle. On obtient

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^2 , \quad x(t) = v_0 t - k \frac{t^2}{2} + k^2 \frac{t^3}{12} ,$$

avec un instant d'arrêt

$$t_0 = \frac{2 \sqrt{v_0}}{k} ,$$

et un point d'arrêt en

$$x_0 = \frac{2 v_0^{\frac{3}{2}}}{3 k} .$$

En reprenant les mêmes notations que précédemment pour la discrétisation, on peut envisager la méthode explicite suivante, pour l'équation de la vitesse :

$$v^{n+1} = v^n - k \Delta t \sqrt{v^n} ,$$

ou encore la méthode implicite

$$v^{n+1} = v^n - k \Delta t \sqrt{v^{n+1}} .$$

On peut même combiner ces deux méthodes pour écrire la méthode hybride suivante

$$v^{n+1} = v^n - \frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^n} + \sqrt{v^{n+1}} \right) .$$

Notre but est surtout de trouver une bonne approximation du point d'arrêt. En ce point, la vitesse va brutalement s'annuler, ce qui signifie qu'on ne doit surtout pas chercher à préserver la positivité de la vitesse. Or la méthode implicite est telle que

$$v^{n+1} = 0 \iff v^n = 0 ,$$

et il sera donc théoriquement impossible d'obtenir une vitesse nulle en partant d'une valeur $v_0 > 0$. En pratique, le zéro "machine" est atteint, et ceci se traduit finalement par une perte de précision non négligeable.

Ce n'est pas le cas des deux autres méthodes. Il faudra simplement convenir de corriger une éventuelle valeur négative de v^{n+1} en la remplaçant par zéro. En effet, pour la méthode explicite, la positivité de v^{n+1} n'est assurée que lorsque la condition suivante

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{v^n}}{k}$$

est vérifiée, ce qui interdit soit de voir v^n devenir petit, et ce n'est pas ce que l'on cherche, soit de prendre un pas Δt constant ; il devrait être actualisé en fonction de $\sqrt{v^n}$ et deviendrait nul lors de l'arrêt de la boule, ce qui imposerait un temps de calcul théoriquement infini.

Une fois le champ de vitesse obtenu, on obtient la position en discrétisant l'équation $x' = v$, par exemple de la façon suivante :

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \frac{v^{n+1} + v^n}{2} ,$$

qui assure une bonne précision.

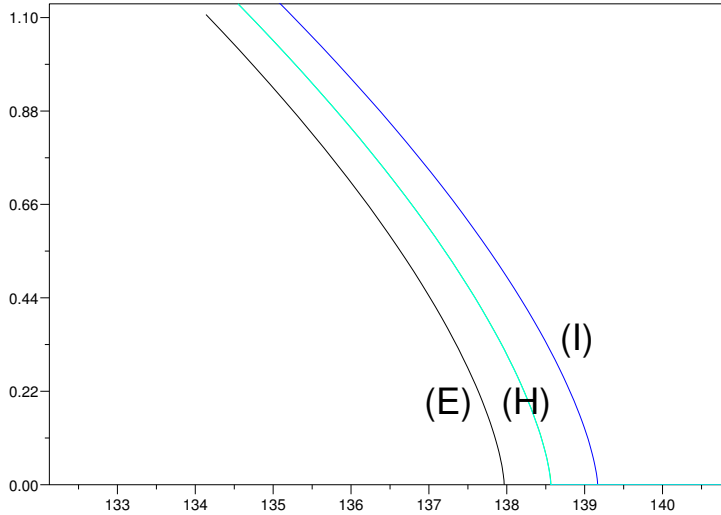
Les trois méthodes ont été comparées pour les choix suivants des paramètres : $v_0 = 12$, $k = 0.2$, et le paramètre de discrétisation $\Delta t = 0.2$. On obtient les points d'arrêt suivants :

$x = 137.96639$ pour la méthode explicite (E),

$x = 139.16635$ pour la méthode implicite (I),

$x = 138.56637$ pour la méthode hybride (H),

le point d'arrêt exact étant $x = 138.56406$. Il faut noter que pour la méthode implicite, on observe en fait une asymptote : la vitesse tend vers zéro, sur une dizaine de points de discrétisation. L'arrêt est beaucoup plus net pour les autres méthodes.



Malgré les apparences, la mise en oeuvre de la méthode hybride est relativement aisée. Il suffit d'écrire la méthode sous la forme suivante :

$$v^{n+1} - v^n = - \frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n} \right) ,$$

qui devient, en divisant par $\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n}$,

$$\sqrt{v^{n+1}} = \sqrt{v^n} - \frac{k \Delta t}{2},$$

et de proche en proche, on en déduit

$$\sqrt{v^n} = \sqrt{v^0} - \frac{k n \Delta t}{2},$$

ce qui revient à dire que cette méthode interpole la solution exacte. Il n'est donc pas étonnant qu'elle apporte le meilleur résultat.

Dans l'étude précédente, le calcul analytique nous a donné l'essentiel des renseignements sans qu'il soit nécessaire d'utiliser le modèle numérique. Il a aussi permis de déterminer le meilleur choix de la méthode numérique. Cependant, si on souhaite généraliser le problème, par exemple en prenant en compte l'hétérogénéité du sol, le coefficient k dépendant alors de la variable x elle même dépendante de v , l'utilisation du modèle numérique devient incontournable.

1.5 Un prêt bancaire à taux variable

On veut modéliser à chaque instant t le montant du capital restant dû, noté $\phi(t)$, d'un prêt à taux variable. On note $x(t)$ ce taux variable ; il s'agit d'une fonction définie sur l'intervalle $]0, T[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, T étant la durée du prêt, qui évolue selon des critères convenus lors de la signature de ce prêt, en fonction d'un indice officiel, lié au coût de la vie ou au coût de la construction par exemple. Entre deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, ce taux est actualisé selon la formule

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \alpha(t) \Delta t x(t),$$

où $\alpha(t)$ est une fonction donnée (liée au critère convenu). En divisant par Δt et après un passage à la limite, on obtient l'équation différentielle

$$x'(t) = \alpha(t) x(t),$$

qu'on peut résoudre en connaissant le taux initial $x(0) = x_0$, qui est aussi une quantité connue lors du démarrage du prêt. On obtient une expression de la forme

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right),$$

qu'on peut expliciter dans la mesure où l'intégration de α est faisable analytiquement.

Entre ces mêmes deux instants consécutifs, l'actualisation du capital restant dû est décrite par

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + x(t) \Delta t \phi(t) - R(x(t), \phi(t), t) \Delta t,$$

où $R(x, \phi, t)$ correspond aux remboursements périodiques ou à d'éventuels remboursements anticipés (d'où la dépendance en t), qui doit dépendre de ϕ parce que R doit devenir nul lorsque $\phi = 0$ (on ne continue pas à payer après qu'on a tout remboursé !) et il peut dépendre de x pour assurer un

remboursement total au plus tard à l'échéance T . Ceci correspond par exemple à des mensualités variables.

On divise par Δt comme précédemment, pour obtenir après un passage à la limite, l'équation différentielle

$$\phi'(t) = x(t) \phi(t) - R(x(t), \phi(t), t) ,$$

qu'on cherche à intégrer en connaissant le montant initial du prêt : $\phi(0) = \phi_0$.

Notons qu'il est préférable de satisfaire la condition

$$R(x(t), \phi(t), t) > x(t) \phi(t) ,$$

pour assurer la décroissance en temps du capital restant dû, ce qui laisse supposer que l'organisme de crédit a bien vérifié que le titulaire du prêt présentait bien les garanties suffisantes de solvabilité... Notons également que si cette inégalité n'est pas satisfaite, on ne doit plus appeler $\phi(t)$ le "capital restant dû", mais le "total restant dû", qui incluerait un arriéré d'intérêts (tout ceci est cependant beaucoup pratiqué par les banques, pour réduire les risques de remboursements anticipés). Le total des sommes versées est donné par

$$\int_0^T R(x(t), \phi(t), t) dt .$$

La résolution analytique de cette équation n'est pas évidente, même pour des cas simples. Ainsi pour $\alpha(t) = \alpha_0$ constant, la fonction ϕ peut s'exprimer directement en fonction de la variable x mais la résolution fait intervenir la fonction "intégrale exponentielle" définie par

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^\xi}{\xi} d\xi = \ln(x) + C + \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \dots + \frac{x^n}{n.n!} + \dots$$

où $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) \simeq 0.5772$ est la constante d'Euler. On peut se dire que même si on réussit à mener à son terme le calcul analytique, en s'aidant éventuellement d'un logiciel approprié, le résultat sera difficilement exploitable.

On s'oriente plutôt vers un choix de méthodes numériques adaptées.

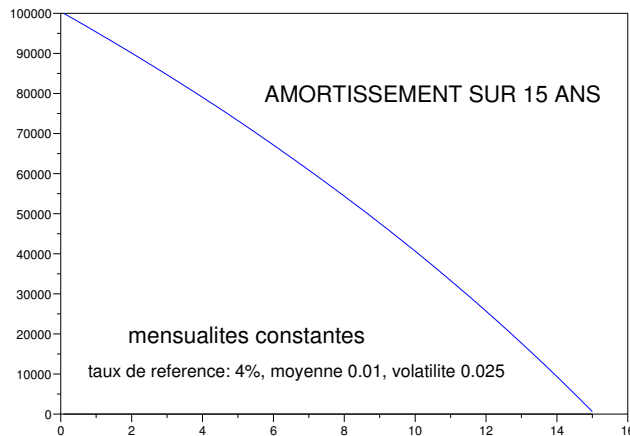
On note encore Δt le paramètre de discrétisation en temps, tel que $N = \frac{T}{\Delta t}$ soit un entier, puis x^n et ϕ^n les approximations respectives de $x(n\Delta t)$ et de $\phi(n\Delta t)$. On peut prendre une méthode explicite :

$$x^{n+1} = x^n (1 + \alpha(n\Delta t) \Delta t) , \quad x^0 = x_0 ,$$

puis

$$\phi^{n+1} = \phi^n (1 + x^n \Delta t) - R(x^n, \phi^{n+1}, n\Delta t) \Delta t , \quad \phi^0 = \phi_0 .$$

La dépendance de R par rapport à ϕ est évaluée en fonction de ϕ^{n+1} pour assurer que ϕ^{n+1} ne devienne pas négatif à la dernière échéance. La mise en oeuvre de cette méthode est immédiate, et elle permet l'utilisation d'un générateur de nombres aléatoires dans l'évaluation de $\alpha(n\Delta t)$, considéré alors comme une variable aléatoire, ce qui permet de faire intervenir la volatilité. La figure précédente représente un calcul effectué pour un prêt de 100 000 Euros sur une durée de 15 ans, avec un taux de référence de 4%. On a pris $\Delta t = \frac{1}{12}$, c'est à dire un mois, et le taux était



modulé par une variable de Gauss (loi normale de moyenne $m = 0.01$ et d'écart-type (volatilité) $\sigma = 0.025$). Les mensualités sont de 750 Euros, sauf la dernière, de 619 Euros. Le total des sommes versées est de 134 869 Euros ; elle est obtenue en calculant

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} R(x^n, \phi^{n+1}, n\Delta t) \Delta t \quad .$$

On remarque qu'au niveau de l'écriture des équations, les modèles de la boule de pétanque et du prêt sont ressemblants, y compris la particularité de la nécessité d'arriver dans une position "zéro" à la fin du calcul, et les allures comparables des courbes de résultats. Il y a cependant une grande différence d'échelle : 15 ans contre quelques secondes... On note également l'introduction d'un terme aléatoire dans le modèle du prêt, ce qui aurait très bien pu être aussi le cas pour la boule, pour représenter d'éventuelles petites variations du sol. Il est aussi intéressant de remarquer que le variable $x = x(t)$ qui joue dans les deux cas le rôle de la variable de position, n'est pas toujours une variable d'espace.

On retiendra ainsi une certaine unité de la démarche dans la modélisation numérique, malgré la très grande disparité des exemples d'application.

1.6 Les hypothèses mathématiques

Ces quatre premiers exemples permettent déjà de rentrer dans le sujet : on y a introduit des méthodes numériques, on a pu voir que le choix de ces méthodes était toujours lié au résultat attendu d'une part, au coût de calcul d'autre part.

Le résultat théorique le plus connu pour les équations différentielles est bien sûr le théorème de Cauchy, qui exige une condition de Lipschitz sur le second membre. Plus exactement, pour une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) ,$$

on suppose que la fonction f vérifie une propriété de la forme

$$\exists L > 0 \quad , \quad \forall t > 0 \quad , \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z| ,$$

appelée condition de Lipschitz uniforme et L est la constante de Lipschitz.

Il se trouve que cette condition n'est pas toujours remplie en pratique. Pour l'exemple de la boule de pétanque, le cas réaliste correspond à

$$f(v) = -k \sqrt{v} ,$$

ou, de façon plus générale,

$$f(v) = -k v^\beta ,$$

avec $0 < \beta < 1$, qui ne satisfait pas la condition de Lipschitz en $v = 0$, valeur qui doit pourtant être atteinte en réalité. Cependant un changement de variable évident : poser $u = \sqrt{v}$, ou $u = v^{1-\beta}$ dans le cas plus général, permet de retrouver la condition de Lipschitz. Dans les deux premiers exemples, un terme en uv introduit un caractère quadratique dans les équations, mais on doit noter qu'en pratique, ce terme reste borné, et la perte du caractère lipschitzien de f à l'infini ne pose en fait pas de véritable problème. Dans le dernier exemple, on n'a pas la maîtrise du terme de remboursement $R(x, \phi, t)$, qui peut présenter une croissance instantanée très forte en cas de remboursement anticipé important ; ici non plus le caractère Lipschitzien n'est pas toujours respecté. On retient qu'au premier degré, on ne sera pas toujours dans les hypothèses d'application du théorème de Cauchy, mais qu'en se donnant la peine de faire une étude préalable, assez sommaire quelquefois, on vérifie bien souvent qu'on peut effectivement s'y ramener.

Il y a cependant des cas où il est impossible de se ramener à la condition de Lipschitz, lorsqu'elle n'est déjà pas assurée au niveau de la donnée initiale. Par exemple, reprenons le cas de la boule de pétanque avec $v(t_0) = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, pour un instant t_0 donné et $t > t_0$, en n'excluant pas a priori la possibilité d'une vitesse négative, ce qui correspond à l'équation

$$v'(t) = -k \sqrt{|v(t)|} .$$

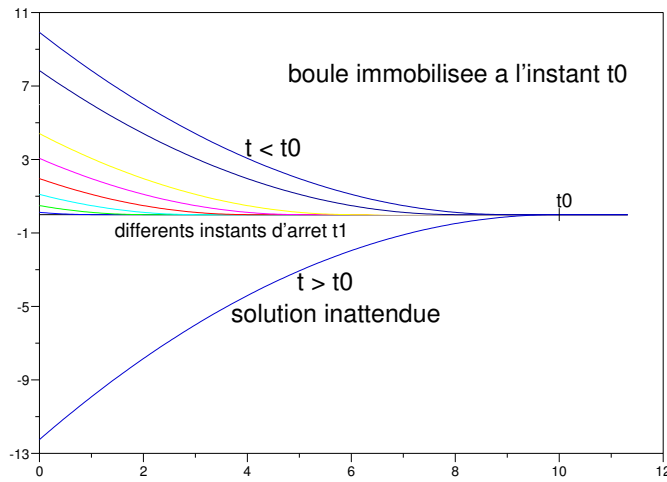
On s'attend bien sûr à ce que la boule ne bouge pas, c'est à dire à la solution $v(t) = 0$. Il existe cependant une autre solution donnée par

$$v(t) = - \left(\frac{k (t - t_0)}{2} \right)^2 ,$$

qui traduit un mouvement accéléré vers l'arrière, complètement inattendu et impossible physiquement car il n'y a pas ici, au départ, d'énergie disponible pour assurer cette mise en vitesse. Ceci constitue un exemple de **non unicité** de la solution.

Une méthode numérique instable partant d'une valeur $v_0 < 0$, même très proche de zéro pourra se brancher sur l'approximation de cette solution si on utilise $\sqrt{|v^n|}$ au lieu de $\sqrt{\max(v^n, 0)}$.

De tels exemples apparaissent cependant dans certaines applications en physique, lorsque suffisamment d'énergie est disponible. C'est le cas en bord de mer, sur une plage, on voit des vagues alors qu'une surface horizontale de l'eau est tout à fait possible. C'est parce qu'il y a suffisamment d'énergie présente pour assurer le maintien et la propagation de ces vagues. Le profil de la surface de l'eau est horizontal entre deux vagues, puis se modifie brusquement au passage de la vague. Il s'agit d'un phénomène de **bifurcation**, qui apparaît lorsque les conditions de l'unicité ne sont pas assurées. D'autres phénomènes de bifurcation apparaissent en physique, ou tout simplement en science de l'environnement, lorsqu'apparaissent certaines catastrophes, comme des tornades, cyclones ou même des raz de marée.



Un autre exemple concernant la boule de pétanque consiste à remarquer que si une boule est immobilisée à un instant t_0 , en un point x_0 , et que l'on se pose la question de retrouver l'histoire récente de cette boule, toutes les solutions suivantes sont possibles. Soit $t_1 \leq t_0$, $t_1 \geq 0$; on pose

$$v(t) = \begin{cases} \frac{k^2}{4} (t_1 - t)^2 & \text{si } t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 < t \leq t_0 \end{cases}, \quad v_0 = \left(\frac{k t_1}{2} \right)^2, \quad x_1 = x_0 - \frac{2 v_0^{\frac{3}{2}}}{3 k}.$$

On obtient qu'il est possible que la boule ait été lancée au point x_1 ci dessus, à la vitesse v_0 , à l'instant $t = 0$, puis qu'elle ait roulé jusqu'au point x_0 , pour s'y immobiliser à l'instant t_1 , et qu'ensuite elle y soit restée immobilisée, et qu'on la retrouve à l'instant $t_0 > t_1$ toujours à cet endroit. Bien entendu, si $t_1 = 0$, la boule n'a même pas été lancée entre les instants $t = 0$ et t_0 . Dans chaque cas, à l'instant $t_1 > 0$, on assiste à une bifurcation. Notons que nous n'avons ici considéré que des vitesses positives,

la même chose est possible avec des vitesses négatives, et on le retrouve en prenant le symétrique du cas précédent par rapport au point x_0 . On retient qu'il est difficile, par la modélisation de retrouver l'histoire d'un phénomène. On peut tout au plus faire une hypothèse sur un état antérieur, puis par la modélisation, valider cette hypothèse en retrouvant, par le calcul, l'état présent à partir de cet état antérieur.

1.7 Quelques généralités sur les méthodes numériques

On considère toujours une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad ,$$

où y_0 constitue une donnée initiale. La fonction y peut être à valeurs réelles ou même à valeurs dans \mathbb{R}^d , d entier sans que cette généralisation ne pose de problème théorique particulier. La fonction f est supposée satisfaire la condition uniforme de Lipschitz, de constante L , c'est à dire

$$\forall t \geq 0, \forall y, z \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^d \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z| \quad ,$$

où \mathbb{A} désigne une partie de \mathbb{R}^d contenant les valeurs attendues de f . En effet, on peut très bien satisfaire une condition de Lipschitz uniforme sur une partie bornée de f qui contient les valeurs attendues, et ne pas en satisfaire sur \mathbb{R}^d tout entier. Par exemple, pour l'équation

$$y'(t) = -y(t)^2, \quad y(0) = y_0 > 0 \quad ,$$

il est immédiat que les valeurs de $y(t)$ restent positives et inférieures à y_0 , la fonction y étant décroissante. On peut ainsi prendre $\mathbb{A} = [0, y_0]$ où f vérifie une condition de Lipschitz de constante $L = 2y_0$, tandis qu'elle n'a pas de telle propriété sur \mathbb{R} tout entier.

Reprenons les notations de discrétisation précédentes, le pas de discrétisation étant noté Δt et l'approximation de $y(n\Delta t)$ étant notée y^n à tout instant $t_n = n\Delta t$. Une méthode numérique est représentée par une expression de la forme suivante

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi(t_n, y^n, \Delta t)$$

où la fonction

$$\Phi : (t, y, h) \longrightarrow \Phi(t, y, h)$$

est définie et continue sur $[0, T] \times \mathbb{A} \times [0, h_0]$ avec h_0 fixé, et \mathbb{A} éventuellement un peu plus grand que le précédent pour contenir les valeurs de la solution approchée.

Si la fonction Φ satisfait une condition de Lipschitz uniforme

$$\exists M > 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall h \in [0, h_0], \quad \forall y, z \in \mathbb{A}, \quad |\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq M |y - z| \quad ,$$

la méthode est **stable**, c'est à dire qu'une petite perturbation des données ne pourra provoquer qu'une petite perturbation du résultat. De plus la méthode est **consistante** avec l'équation qu'on approche si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall y \in \mathbb{A} \quad \Phi(t, y, 0) = f(t, y) \quad .$$

Si ces deux conditions sont respectées (stabilité et consistance) alors la méthode est **convergente**, c'est à dire qu'en faisant tendre Δt vers zéro, la différence entre la solution approchée et la solution exacte $y(t)$ tend également vers zéro aux points de la discrétisation. On a en fait une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t ,$$

où K est une constante dépendant des données, et plus particulièrement de la régularité de f .

La méthode est **précise à l'ordre 2**, c'est à dire qu'une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t^2 ,$$

est vérifiée, lorsqu'on ajoute la condition nécessaire et suffisante suivante,

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{A} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, y) ,$$

avec

$$f^{(1)}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) .$$

Cette fois, la constante K dépend de la régularité de $f^{(1)}$, ce qui constitue une hypothèse plus restrictive. En posant ensuite, de proche en proche

$$f^{(k+1)}(t, y) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial y}(t, y) ,$$

on atteint une précision d'ordre p si et seulement si les conditions suivantes,

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{A} \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, y, 0) = \frac{1}{k+1} f^{(k)}(t, y)$$

sont vérifiées pour $k = 1, \dots, p-1$. On a alors une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t^p ,$$

où K dépend cette fois de la régularité de $f^{(p)}$.

Dans l'exemple de la boule de pétanque, la solution étant notée v , on avait $f(t, v) = -k\sqrt{v}$, où k est une constante positive ici. La méthode retenue s'écrivait

$$v^{n+1} = v^n - \frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n} \right) ,$$

ou encore

$$\sqrt{v^{n+1}} = \sqrt{v^n} - \frac{k \Delta t}{2} .$$

La fonction Φ correspondante est

$$\Phi(t, v, h) = \frac{h k^2}{4} - k \sqrt{v} .$$

On a bien

$$\Phi(t, v, 0) = -k \sqrt{v} = f(t, v) ,$$

d'où la consistance. Par ailleurs, $\frac{1}{2} f^{(1)}(t, v) = \frac{k^2}{4}$, et la méthode est bien d'ordre deux, car $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, v, 0) = \frac{k^2}{4}$. Ensuite, les termes $f^{(k)}$ sont tous nuls pour $k \geq 2$, ainsi que les termes $\frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}$, ce qui signifie que tous les ordres de précision sont atteints, et, effectivement, nous avons bien remarqué que la solution approchée interpolait bien la solution exacte. Par contre, la condition de Lipschitz n'est pas assurée, ni pour f ni pour Φ , ce qui ne nous gêne pas particulièrement ici, s'agissant d'une condition suffisante seulement. En fait, si on effectue un changement de variable de la forme $y = \sqrt{v}$, on retrouve des conditions de Lipschitz sur les nouvelles expressions de f et de Φ .

Considérons maintenant cet autre exemple :

$$y'(t) = -y(t)^2 , \quad y(0) = y_0 \quad \text{avec} \quad y_0 > 0 .$$

On utilise la méthode suivante :

$$y^{n+1} = y^n - \Delta T y^n y^{n+1} ,$$

qui correspond aussi à l'expression

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{1 + \Delta t y^n} .$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq y^n \leq y^0$, et donc le choix de $\mathbb{A} = [0, y_0]$ est possible, et f vérifie bien la condition de Lipschitz sur \mathbb{A} . La fonction Φ est donnée par

$$\Phi(t, y, h) = -\frac{y^2}{1 + hy} ,$$

et on vérifie bien que le critère de stabilité est satisfait, ainsi que le critère de consistance $\Phi(t, y, 0) = -y^2 = f(t, y)$, et donc la convergence est assurée. De plus, on calcule d'une part

$$f^{(1)}(t, y) = f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = (-y^2) (-2y) = 2 y^3 ,$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h) = \frac{y^3}{(1 + hy)^2} ,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = y^3 = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, y) .$$

Cette méthode est d'ordre deux. Il est intéressant de remarquer que la méthode explicite $y^{n+1} = y^n - \Delta t (y^n)^2$ n'assure la positivité que pour $\Delta t \leq \frac{1}{y_0}$, ce qui peut être restrictif si y_0 est grand, et que la méthode implicite $y^{n+1} + \Delta t (y^{n+1})^2 = y^n$ exige une résolution d'équation du second degré, donnant

$$y^{n+1} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\sqrt{1 + 4\Delta t y^n} - 1 \right) ,$$

un peu plus lourde que notre exemple, en n'assurant que l'ordre un en précision. Cet exemple montre qu'un schéma plus précis n'est pas forcément plus complexe.

1.8 Conclusion

De façon générale, on retiendra surtout la complémentarité des deux modèles, mathématique et numérique, dans chacun des exemples proposés, et que le choix du modèle numérique n'est jamais réduit à l'unité, et il est toujours préférable de faire le meilleur choix possible, évidemment, et ceci exige une certaine compétence dans le domaine du calcul scientifique.

On retient aussi que pour les deux premiers exemples d'une part, les deux autres d'autre part, les équations se ressemblent beaucoup, bien que les applications soient très différentes, notamment les échelles de temps ou la signification des variables. Cette situation est fréquente ; pour faire court, on dirait "les équations sont les mêmes, ce sont les applications qui changent..."

Enfin, on a pu constaté qu'en dehors du champ d'application des hypothèses mathématiques (la condition de Lipschitz ici) le comportement pouvait perdre son réalisme, ou plusieurs comportements possibles étaient envisageables. Il sera alors, au niveau du modèle mathématique, imposer une condition supplémentaire pour écarter un comportement irréaliste, une **condition d'entropie** par exemple, qui interdit la croissance gratuite de l'énergie, ou une autre condition pour fixer l'une des diverses solutions réalistes possibles quand une telle situation se présente. Le plus souvent, lorsqu'on sort du champ d'application des mathématiques, on va plutôt observer une perte de la stabilité, et un calcul qui n'est pas mené à son terme.

Chapitre 2

La Modélisation d'une onde

2.1 Qu'est ce qu'une onde ?

Il est bien rare que, dans un traité de physique, on trouve la définition d'une onde, tellement le concept est évident pour ceux qui le pratiquent tous les jours. On ne s'attendra pas plus à trouver la définition d'une vache dans un traité d'agronomie...(la recherche internet de "definition of a cow" donne cependant des résultats intéressants, qui n'ont que peu de liens avec l'agronomie..).

L'onde est quelquefois définie comme une perturbation qui transporte une énergie d'un endroit à un autre. Ceci est un peu abstrait, plutôt restrictif car, par exemple, la variable de position ne représente pas toujours l'espace, et exige de se reporter à la définition d'énergie, qui n'est pas évidente à concevoir dans un contexte général (par exemple dans les domaines économiques ou en sciences humaines...). On va préférer se fier à l'idée que l'on s'en fait, par nos propres observations personnelles.

La perception intuitive d'une onde correspond à un profil qui se déplace, ou se propage, en subissant éventuellement une modification continue au cours de son évolution.

Ce déplacement n'a pas lieu systématiquement dans l'espace physique, il peut s'agir d'une évolution sur une grille donnée, représentant des états possibles, comme par exemple un échelle de notations. D'un point de vue mathématique, où les trivialités sont de rigueur, on peut proposer un profil plat, de vitesse nulle, comme premier exemple, complètement dénué d'intérêt...

A partir de cette simple interprétation intuitive, il est possible de modéliser par une équation mathématique la propagation d'une onde. Pour la situer nous utiliserons une **variable de position**, par exemple une variable d'espace, qui sera notée le plus souvent $x \in \mathbb{R}^d$ si d est la dimension de l'espace, et une **variable d'évolution**, par exemple le temps, qui sera notée $t \geq 0$. Les valeurs de t seront appelées des **instants**, par analogie avec le temps, et la différence entre deux instants consécutifs sera appelée une **durée**. De la même façon, les valeurs de x seront appelées des **points** et la différence entre deux points sera appelée une **distance**.

Nous allons commencer par construire cette équation, qui sera appelée **équation d'onde**, puis quelques termes techniques seront introduits, et ensuite plusieurs exemples d'applications seront adaptés.

2.2 L'équation d'onde

On se place en dimension un d'espace, pour l'instant. En un point x et à un instant t , on note $\phi(x, t)$ l'amplitude du profil d'onde. Nous allons comparer les situations consécutives à deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$. Si la position du profil à l'instant t est x , sa position sera devenue $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$, en tenant compte d'un petit déplacement Δx proportionnel à Δt que l'on représente sous la forme

$$\Delta x = \lambda(x, t, \phi, \dots) \Delta t$$

avec un coefficient $\lambda(x, t, \phi, \dots)$ **réel**, qui a la dimension d'une vitesse. On l'appellera **vitesse caractéristique** de l'onde.

La modification continue éventuelle du profil d'onde pendant la durée Δt est elle aussi proportionnelle à Δt et sera notée $\Delta t S(x, t, \phi, \dots)$. Cette définition intuitive nous conduit à écrire

$$\phi(x, t) = \phi(x + \Delta x, t + \Delta t) + \Delta t S(x, t, \phi, \dots) + \Delta t \omega(\Delta t)$$

où $\omega(\Delta t)$ est un **module de continuité**, c'est à dire une fonction réelle, continue et nulle à l'origine, ainsi $\omega(\Delta t) \rightarrow 0$ si $\Delta t \rightarrow 0$. Compte tenu de la relation précédente, c'est à dire $\Delta x = \lambda(x, t, \phi, \dots) \Delta t$, on peut écrire

$$\phi(x, t) = \phi(x + \lambda(x, t, \phi, \dots)\Delta t, t + \Delta t) + \Delta t S(x, t, \phi, \dots) + \Delta t \omega(\Delta t),$$

et obtenir après un développement limité au premier ordre, quelques simplifications immédiates, puis un passage à la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, et aussi sous réserve de disposer de la régularité suffisante, l'équation suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(x, t, \phi, \dots) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S(x, t, \phi, \dots) = 0 .$$

Il s'agit d'une **équation du premier ordre**, puisqu'elle ne fait intervenir que des dérivées premières. La vitesse caractéristique $\lambda(x, t, \phi, \dots)$ doit être réelle. Le terme $S(x, t, \phi, \dots)$ est appelé **terme source**. Cette équation modélise la propagation d'une onde d'amplitude ϕ et est appelée **équation d'onde**.

Les quantités λ et S peuvent dépendre de la position x et de l'instant t , ou de l'amplitude ϕ , ou encore de tout autre paramètre extérieur susceptible d'intervenir. Lorsque la vitesse caractéristique λ dépend effectivement du profil ϕ , c'est à dire lorsque $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} \neq 0$, on dit que l'onde est **vraiment non linéaire**. Dans le cas contraire, pour $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} = 0$, l'onde est dite **linéairement dégénérée**.

2.2.1 L'exemple fondamental : l'équation des ondes

On considère, sur l'axe réel, la translation d'un profil d'une distance $\lambda_0 t$ proportionnelle à t , le temps, pour λ_0 réel donné. Si ce profil est représenté par le graphe d'une fonction donnée $\phi_0(x)$, on obtient à chaque instant t un nouveau profil représenté par

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - \lambda_0 t) .$$

Il est immédiat de vérifier, si ϕ_0 est suffisamment régulière, que ϕ est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

et satisfait la condition initiale

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) .$$

En dérivant encore une fois, on obtient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\lambda_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -\lambda_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ,$$

qui exprime que ϕ est une solution de l'**équation des ondes** classique

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 .$$

Il est important de remarquer que λ_0 n'apparaît seulement que dans l'expression λ_0^2 , ce qui signifie qu'on aurait obtenu le même résultat en remplaçant λ_0 par $-\lambda_0$. De fait, un profil déterminé par la fonction

$$\psi(x, t) = \psi_0(x + \lambda_0 t)$$

est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 ,$$

et de la même équation des ondes que précédemment,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 .$$

Les deux profils ϕ et ψ représentent deux ondes de vitesses opposées. La solution générale de l'équation des ondes est donnée par la **superposition** de ces deux ondes :

$$w(x, t) = \phi_0(x - \lambda_0 t) + \psi_0(x + \lambda_0 t) .$$

On obtient l'expression des profils ϕ_0 et ψ_0 en imposant deux conditions initiales, la première étant

$$w(x, 0) = \phi_0(x) + \psi_0(x) ,$$

et la seconde portant sur la dérivée en temps

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \lambda_0 (\phi'_0(x) - \psi'_0(x)) ,$$

qui exprime la vitesse initiale. En pratique, on se donne un profil initial

$$w(x, 0) = u_0(x) ,$$

et une vitesse initiale

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) ,$$

et on en déduit ϕ_0 et ψ_0 en intégrant respectivement les deux équations

$$\phi'_0(x) = \frac{1}{2} (\lambda_0 u'_0(x) + v_0(x)) , \quad \psi'_0(x) = \frac{1}{2} (\lambda_0 u'_0(x) - v_0(x)) .$$

Il faut retenir que la méthode de séparation des variables, consistant à rechercher une solution de la forme $w(x, t) = u(t)v(x)$ puis à superposer les différentes solutions obtenues, est d'une utilité contestable ici. En effet, compte tenu de ce qui précède, les fonctions u et v devront être telles que $u(t)v(x)$ soit une fonction de $x - \lambda_0 t$ ce qui ne peut être vérifié que par des exponentielles. Le comportement à l'infini pourra alors poser des problèmes insurmontables en général, ce qui imposera des choix exclusifs d'exponentielles bornées, c'est à dire à argument imaginaire pur, et on va ainsi retrouver la transformation de Fourier.

Comme λ_0 est ici une constante, toutes ces ondes sont **linéairement dégénérées**.

2.3 Quelques exemples d'ondes

2.3.1 Un produit financier

On considère un produit financier qui peut être un portefeuille d'actions ou d'obligations ou encore des produits dérivés, dont la valeur est influencée par le marché qui impose un taux de rendement, et par des mouvements de capitaux : achats, ventes, retraits, dépôts, etc... En anglais, on utilise le terme "asset" pour désigner ce type de produits.

La variable de position est ici le taux de rendement du produit, et la variable d'évolution est le temps. La valeur du produit à l'instant t lorsque le taux de rendement est x , est notée $\phi(x, t)$. Entre deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$ le taux de rendement subit une correction $\Delta x = \lambda \Delta t$, et la valeur du produit subit une variation égale à $x\phi(x, t)\Delta t$ en bénéfice ou en perte suivant le signe de x , liée à la variation du marché, augmentée ou diminuée d'éventuelles opérations d'achat ou de vente dont le bilan pendant la durée Δt est noté $B(x, t, \phi)\Delta t$. Notons que la dépendance de B par rapport à ϕ est naturelle : si ϕ devient nulle, on ne peut plus vendre. On obtient l'équation de bilan suivante

$$\phi(x + \lambda\Delta t, t + \Delta t) = \phi(x, t) (1 + x \Delta t) + B(x, t, \phi) \Delta t + \Delta t \omega(\Delta t)$$

qui conduit à l'équation d'onde suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \phi + B(x, t, \phi) \quad (3.1)$$

où le terme source est de la forme $S = -x\phi - B(x, t, \phi)$.

En général le taux de variation, qui correspond ici à la vitesse caractéristique λ , est imposé par le marché et est indépendant de ϕ lorsque le portefeuille reste "modeste". Par contre, de gros mouvements spéculatifs de capitaux peuvent provoquer une variation de λ . On pourra considérer que le modèle est vraiment non linéaire lorsque de tels gros mouvements apparaissent, et qu'il est linéairement dégénéré pour les "petits porteurs".

Le cas du livret de la Caisse d'Epargne (par exemple) rentre également dans ce cadre. Le taux de rémunération x est toujours positif et reste longtemps constant, ce qui se traduit par une vitesse caractéristique λ nulle pendant ces périodes. Lorsque le ministère des finances décide une variation du taux de rémunération x , la vitesse λ subit une variation brutale sur une durée très courte, et on est amené à l'interpréter comme une **impulsion** ou une masse de Dirac, notée δ habituellement. Imaginons qu'un titulaire de livret fasse un mouvement de retrait ou de dépôt exactement à l'instant

de la variation du taux de rémunération : le produit $\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}$ se comporte comme le carré d'une masse de Dirac δ . Or l'espace des distributions n'étant pas une algèbre, on n'a pas la faculté d'y effectuer des multiplications, et en particulier de définir δ^2 . En pratique cette éventualité n'apparaît jamais, puisque la modification de λ a lieu à minuit, lorsque les opérations sont bloquées, et qu'il n'est donc pas possible d'effectuer des mouvements de dépôts ou de retraits.

2.3.2 L'âge d'une population

On considère une population donnée, et on note $\phi(x, t)$ le nombre d'individus ayant l'âge x à l'instant t . Ainsi, la variable de position x ne correspond pas ici à une variable d'espace. Dans la plupart des cas, on s'attend à voir chaque individu vieillir à la même vitesse, c'est à dire d'un accroissement d'âge $\Delta x = \Delta t$ pendant une durée Δt . On obtient une vitesse caractéristique $\lambda = 1$, et bien entendu l'onde sera linéairement dégénérée.

Pour prendre en compte la mortalité, on introduit un coefficient $\mu(x)$ qui dépend de façon croissante (en général) de l'âge, et qui va apparaître dans un terme source indiquant que pendant la durée Δt l'effectif de la population d'âge x décroît de $\mu(x) \phi(x, t) \Delta t$. Le bilan donne

$$\phi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \phi(x, t) (1 - \mu(x) \Delta t)$$

qui conduit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu(x) \phi = 0 \quad (3.2)$$

Quelquefois, la vitesse de vieillissement λ n'est pas constante et peut dépendre du temps. Ainsi, pour certaines espèces d'insectes, le processus d'hibernation ralentit de processus de vieillissement, ce qui se traduit par une valeur de $\lambda(t)$ beaucoup plus faible que la normale. Au contraire, pour un parc d'objets fragiles, le passage de l'hiver va rendre les pannes plus fréquentes et donc accélérer le processus de vieillissement. Une dépendance en x n'est pas exclue non plus : une forte canicule peut accélérer le processus de vieillissement des membres les plus âgés d'une population. Le coefficient $\mu(x)$ n'est pas toujours croissant ; ainsi, dans un système de proies-prédateurs, les proies les plus faciles sont les plus vulnérables, donc souvent les plus jeunes et les plus vieux. Ce coefficient peut aussi dépendre du temps : par exemple la mortalité d'une population de truites n'est pas la même avant ou après l'ouverture de la pêche. L'équation d'onde précédente se généralise ainsi en

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu(x, t) \phi = 0 .$$

On peut envisager également de ne plus considérer la population d'un point de vue global, mais aussi de sa localisation dans l'espace, qui peut être d'une, deux ou trois dimensions. La population d'eudémis sur un rang de vigne va par exemple utiliser la dimension un, pour une population humaine sur un territoire, ce sera la dimension deux, et la dimension trois va convenir pour décrire une population de poissons dans un modèle océanique par exemple. On atteint ainsi une dimension "quatre" pour la variable de position ; cette dimension peut encore augmenter si on tient compte d'autres paramètres : le poids , la taille, etc...

2.3.3 Le trafic routier

On considère un cas simple, où tous les véhicules vont dans le même sens (comme sur une rocade par exemple). La variable de position correspond à une variable d'espace, en dimension un bien évidemment, et la variable d'évolution est le temps. La densité du trafic au point x et à l'instant t est représentée par son amplitude $\phi(x, t)$. La vitesse du trafic est notée v et dépend à la fois de la position, du temps et de la densité du trafic. En effet, le trafic ne peut pas d'écouler à la même vitesse lorsque la densité du trafic est faible ou qu'elle est proche du bouchon (représenté par une densité maximale ϕ_b). Sur un axe donné, on note $g(\phi)$ la valeur maximale de la vitesse qu'autorise la densité du trafic ; il s'agit d'une fonction positive ou nulle de la densité, qui devient effectivement nulle lorsque la densité de bouchon ϕ_b est atteinte. Il existe une autre contrainte, qui est la vitesse maximale autorisée, notée v_M , qui peut dépendre de la position x (plus réduite par exemple en agglomération, zone de travaux, etc...) ou du temps t (les feux de circulation ; $v_M = 0$ lorsque le feu est rouge) et on obtient ainsi une borne de la vitesse donnée par :

$$0 \leq v \leq \text{Min}(v_M, g(\phi)) \quad .$$

Le débit ou le flux du trafic est donné par la quantité $m = \phi v$. On peut établir une équation de bilan en considérant un segment de route de longueur Δx centré sur un point x , et sa situation en deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$. On écrit que le nombre de véhicules présents à l'instant $t + \Delta t$ dans ce segment est égal au nombre de véhicules présents à l'instant t dans ce même segment, diminué du nombre de véhicule qui en sont sortis, et augmenté de ceux qui y sont rentrés, en provenance d'un segment analogue centré sur un point $x - \Delta x$. Ce bilan donne

$$\phi(x, t + \Delta t) \Delta x = \phi(x, t) \Delta x - \phi(x, t) v(x, t) \Delta t + \phi(x - \Delta x, t) v(x - \Delta x, t) \Delta t + \dots$$

En effet la sortie des véhicules du segment correspond à une partie de ce segment de longueur $v(x, t) \Delta t$ pendant la durée Δt . Il en va de même du côté de l'entrée. Les "..." symbolisent d'éventuels termes d'ordre supérieur en Δx ou Δt qui disparaîtront lors du passage à la limite, pour établir l'équation d'onde. L'équation de bilan peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\phi(x, t + \Delta t) - \phi(x, t)}{\Delta t} + \frac{\phi(x, t) v(x, t) - \phi(x - \Delta x, t) v(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = 0 + \dots$$

et un passage à la limite lorsque Δx et Δt tendent vers zéro simultanément aboutit à l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\phi v) = 0 \quad .$$

Cette équation est appelée **équation de transport**, et on la retrouve chaque fois qu'une densité ϕ est transportée par un débit ou un flux noté m . Dans le cas présent, on a $m = \phi v$. De façon générale, elle s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad .$$

Une équation d'onde peut être obtenue en décidant que l'inégalité $v \leq \text{Min}(v_M, g(\phi))$ est réalisée à l'égalité, c'est à dire

$$v = \text{Min}(v_M, g(\phi))$$

ce qui revient à exprimer que le comportement des conducteurs consiste à rouler le plus vite possible.

En posant $f(\phi) = \phi \text{ Min}(v_M, g(\phi))$, on obtient une équation de la forme suivante, dite **conservative**,

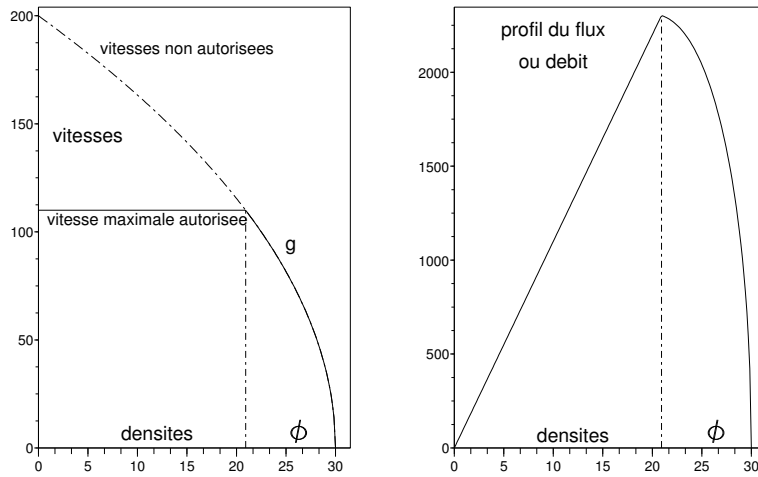
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0$$

qui, lorsque f est dérivable, prend la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

d'où la vitesse caractéristique

$$\lambda = f'(\phi).$$



La fonction $g(\phi)$ est décroissante et concave ; il existe (en général) une valeur ϕ_0 pour laquelle $g(\phi_0) = v_M$. Ainsi, l'onde est linéairement dégénérée pour $0 \leq \phi < \phi_0$ et vraiment non linéaire ensuite, lorsque $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_b$.

La fonction $g(\phi)$ dépend beaucoup du comportement des conducteurs ; dans les pays où le "headway" est respecté (il s'agit de l'espace qu'un conducteur laisse devant lui pour permettre à ceux qui le doublent de se rabattre ; il n'y a pas de mot correspondant en français...), le graphe de $g(\phi)$ est situé plus bas que dans les pays où les distances de sécurité ne sont pas respectées. On note que le débit est nul en $\phi = 0$ et en $\phi = \phi_b$, et positif ailleurs, d'où l'existence d'un débit

maximal ϕ_* , qui coïncide avec ϕ_0 lorsque $\phi g'(\phi) + g(\phi) < 0$ pour $\phi_0 < \phi < \phi_b$. Notons que la vitesse caractéristique λ est négative sur un voisinage de ϕ_b .

2.3.4 L'équation de Burgers

On considère un écoulement de fluide de vitesse $u(x, t)$ au point $x \in \mathbb{R}$, à l'instant $t > 0$, et on fait l'hypothèse que ce fluide n'est en rien perturbé. La vitesse n'est donc pas modifiée, et entre deux instants consécutifs, on peut écrire

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x, t)$$

et comme u correspond effectivement à la vitesse de déplacement, on aura

$$\Delta x = u \Delta t$$

au premier ordre. Le passage à l'équation d'onde correspondante donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

qui est appelée **Equation de Burgers** du premier ordre. Cette onde est **vraiment non linéaire**.

Une remarque importante consiste à faire le parallèle avec l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

que l'on multiplie par $f''(\phi)$, supposée non nulle. On obtient exactement l'équation de Burgers réalisée par $u = f'(\phi)$. On peut en déduire que, tant que la solution est régulière, les solutions explicites de l'équation de Burgers permettent, en inversant l'équation $f'(\phi) = u$, de construire des solutions explicites de l'équation générale en ϕ . Par exemple, comme u représente une vitesse, on constate que

$$u = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

est bien solution de l'équation de Burgers, et donc que des solutions de l'équation générale en ϕ sont obtenues implicitement par l'expression

$$f'(\phi) = \frac{x - x_0}{t - t_0} ,$$

qui se résout de façon univoque quand par exemple f' est monotone, ce qui est bien le cas si f'' est non nulle. On retrouve encore une onde vraiment non linéaire.

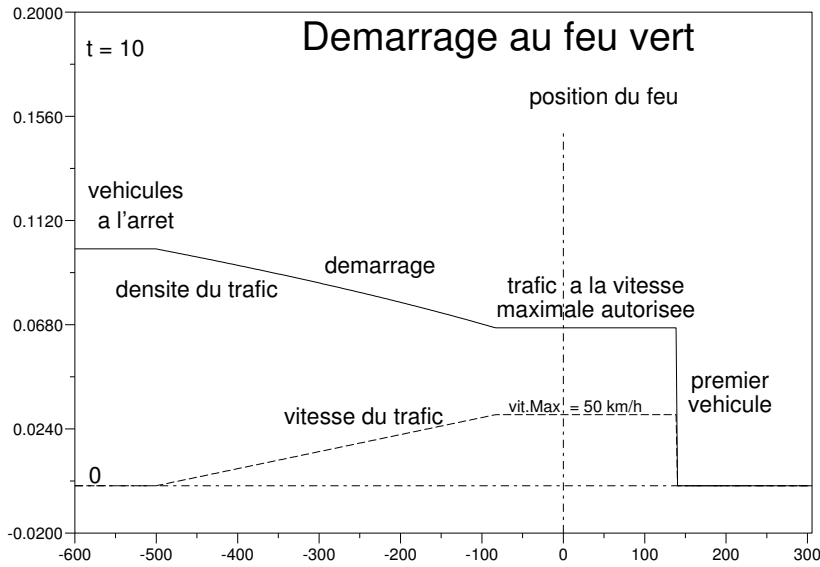
Cette équation de Burgers joue ainsi un rôle central dans l'étude des équations du premier ordre, dans le cas vraiment non linéaire.

Un exemple, retour au trafic routier

On veut simuler le départ au feu tricolore qui vient de passer au vert, dans un secteur urbain limité à $v_M = 50 \text{ kmh}^{-1}$ soit $v_M = 13.8888889 \text{ m s}^{-1}$. On estime la densité du bouchon à $\phi_b = 0.1$, soit un véhicule par 10 mètres de chaussée en moyenne, et on prend la fonction g de la forme

$$g(\phi) = A (\phi_b^2 - \phi^2) ,$$

et en estimant que l'état de la route ne permet qu'une vitesse maximale de 90 km h^{-1} (hors contrainte légale, bien entendu), on obtient $A = 2500$. Le maximum du flux $\phi g(\phi)$ est réalisé pour la densité $\frac{\phi_b}{\sqrt{3}}$, soit 0.057735 véhicules par mètre, environ. On a $g(\phi) = v_M$ pour $\phi = \phi_* = \sqrt{\phi_b^2 - \frac{v_M}{A}}$ soit 0.066666 véhicules par mètre, environ, supérieur à $\frac{\phi_b}{\sqrt{3}}$.



En posant

$$f(\phi) = \phi \text{ Min}(v_M, g(\phi)) ,$$

et en positionnant le feu en $x = 0$ et le passage au vert en $t = 0$, la résolution de l'équation

$$f'(\phi) = \frac{x}{t}$$

conduit à

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > v_M t & \text{(rien n'est encore arrivé)} \\ \phi_* & \text{si } (3v_M - 2A\phi_b^2)t < x \leq v_M t & \text{(arrivée des premiers véhicules)} \\ \sqrt{\frac{\phi_b^2}{3} - \frac{x}{3At}} & \text{si } -2A\phi_b^2 t < x \leq (3v_M - 2A\phi_b^2)t & \text{(onde de démarrage)} \\ \phi_b & \text{si } x \leq -2A\phi_b^2 t & \text{(véhicules encore en attente)} \end{cases}$$

Cependant, ce modèle n'est pas réaliste, puisqu'il admet implicitement qu'on puisse passer instantanément de la vitesse zéro à la vitesse v_M , y compris les camions... ceci n'est possible que pour un véhicule sans masse, qui pourrait être soumis à une accélération impulsienne. Les temps de reprise des moteurs et les temps de réaction des conducteurs font qu'un front de démarrage moins raide va apparaître en réalité. Par contre, l'onde de démarrage qui remonte la file de véhicules en attente est de profil réaliste; sa vitesse de 50 m s^{-1} soit 180 km h^{-1} est cependant bien exagérée. On verra par la suite comment mieux décrire le comportement des conducteurs, ce qui aura pour effet d'introduire plus d'inertie dans le modèle, et rectifier ces imperfections.

2.4 Les caractéristiques

L'expression $\Delta x = \lambda(x, t, \phi, ..) \Delta t$ conduit naturellement à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\phi, x, t, ..) ,$$

que nous appellerons **équation caractéristique**, et qui correspond à une courbe particulière du plan (x, t) , appelé le **plan physique**. En effet, en se restreignant à cette courbe, c'est à dire en prenant en compte la quantité $\phi(x(t), t)$ le long de cette courbe, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t), t) + S(\phi(x(t), t), x(t), t) = 0 ,$$

qui exprime que $\phi(x(t), t)$ ne varie qu'en fonction du terme source, et en particulier reste constante le long de cette courbe lorsque $S \equiv 0$, c'est à dire dans le cas homogène. Cette courbe est appelée **courbe caractéristique**. Elle permet souvent de construire explicitement des solutions. On peut l'interpréter comme la **trajectoire** d'une particule dont le mouvement serait contrôlé par l'équation $x'(t) = \lambda$. La donnée des deux courbes précédentes constitue le **système caractéristique**.

Reprenons l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ;$$

les caractéristiques doivent vérifier le système caractéristique, c'est à dire ici,

$$\frac{d}{dt} x(t) = u(x(t), t) \quad ; \quad \frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0 .$$

On constate que $u(x(t), t)$ reste constant le long des caractéristiques, et comme de plus il s'agit aussi de la pente de ces caractéristiques, on aboutit à la conclusion : "**les caractéristiques sont**

des droites". Ainsi, en attribuant une valeur initiale, en $t = 0$, notée $u_0(x_0)$, en un point x_0 , on obtient la caractéristique d'équation

$$x = x_0 + u_0(x_0) t .$$

Les données $u_0(x_0)$ en chaque point x_0 constituent une fonction u_0 définie sur \mathbb{R} , qu'on appellera la **donnée initiale** ou encore la **condition initiale**.

Pour construire la solution en un point (x, t) de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, c'est à dire pour obtenir la valeur de $u(x, t)$, il nous faut rechercher un point x_0 tel que

$$u(x, t) = u_0(x_0) ,$$

et ce point doit aussi satisfaire $x = x_0 + u_0(x_0) t$, c'est à dire être le point de départ de la caractéristique, pour $t = 0$. En éliminant x_0 on obtient la condition implicite

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) t) \quad (4.1)$$

qui est aussi appelée **équation caractéristique**. On observe que les caractéristiques issues de l'origine (en $x_0 = 0$) sont de la forme

$$u(x, t) = \frac{x}{t} \quad (4.2)$$

et cette remarque a déjà été notée lors de l'étude de l'équation de Burgers, elle permet de construire aisément des solutions explicites, et elle sera encore bien utile dans la suite.

Dans le cas plus général de l'équation $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(\phi)) = 0$, c'est à dire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

qui se réduit à l'équation de Burgers lorsque $u = f(\phi)$, les équations caractéristiques deviennent ici

$$\frac{d}{dt} x(t) = f'(\phi(x(t), t)) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \phi(x(t), t) = 0$$

et en notant ϕ_0 une donnée initiale on obtient l'équation caractéristique suivante,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - f'(\phi(x, t)) t)$$

qui est implicite en $\phi(x, t)$. Sa résolution permet de retrouver des solutions explicites en $\phi(x, t)$. On dérive maintenant cette expression par rapport à x , pour obtenir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi'_0(\xi)}{1 + t f''(\phi) \phi'_0(\xi)} ,$$

où on a posé, pour simplifier, $\xi = x - f'(\phi(x, t)) t$, ce qui permet de constater qu'en dehors des deux cas suivants :

$$\begin{aligned} &\phi_0 \text{ croissante} , \quad f \text{ convexe} \\ &\phi_0 \text{ décroissante} , \quad f \text{ concave} \end{aligned}$$

le dénominateur risque de s'annuler pour une valeur positive de t . Dans un tel cas le terme $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ devient de plus en plus grand localement, et ce raidissement va se traduire finalement par une discontinuité, qui est couramment appelée une **onde de choc**. Une telle onde est un lieu de rencontre des caractéristiques, ce qui correspond effectivement à une ambiguïté, chaque caractéristique apportant une valeur différente de la solution. Une rencontre de caractéristiques ne peut apparaître que dans le cas d'une onde vraiment non linéaire; elle est impossible dans le cas linéairement dégénéré.

2.5 Les champs conservatifs et les chocs

Lorsque les caractéristiques se rencontrent, il est indispensable de caractériser aussi ce lieu de rencontre, de façon à déterminer les secteurs d'influence des différents champs de caractéristiques. La figure ci dessous correspond à une équation d'onde vraiment non inéaire et homogène, les caractéristiques étant alors nécessairement des droites issues de l'axe des x , c'est à dire $t = 0$. Il s'agit de l'équation de Burgers, avec pour condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et une rencontre de caractéristiques a effectivement lieu le long d'une courbe issue du point de discontinuité initial, en $x = 1$, dont l'équation est $x = \sqrt{1+t}$, par la caractérisation que l'on se propose de construire.

On commence par introduire un espace B_0 puis la notion de **champ conservatif**.

Définition 2.5.1 On note B_0 l'espace vectoriel constitué des fonctions bornées sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, continues sauf le long d'un nombre fini ou dénombrable d'arcs de courbe réguliers.

Cet espace décrit le type de régularité attendue : la solution d'une équation d'onde est continûment différentiable, sauf le long des trajectoires des chocs, qui correspondent effectivement à des discontinuités.

Définition 2.5.2 Soit $U = (q, m)$ une application définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 et S une fonction localement intégrable sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que $U \in B_0^2$ est un **champ conservatif de source S** lorsque pour tout ouvert connexe A , de frontière Γ_A régulière, dont la normale unitaire extérieure est notée n_A , on a

$$\int_{\Gamma_A} U \cdot n_A \, d\sigma = \int_A S \, dxdt .$$

Si $S = 0$, il est appelé **champ conservatif homogène**.

Nous avons la propriété essentielle suivante.

Théorème 2.5.3 Si $U = (q, m)$, un champ conservatif de source S sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, est de classe $C^1((]0, +\infty[\times \mathbb{R})^2)$ ses composantes vérifient l'équation d'onde

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = S .$$

Remarque : dans le cas d'un champ conservatif homogène, la composante q peut être interprétée comme une **densité** transportée par le **flux** m . L'équation d'onde précédente est alors appelée **équation de transport**.

Démonstration : On utilise la formule de Green Riemann sur un ouvert A quelconque, c'est à dire

$$\int_{\Gamma_A} U \cdot n_A \, d\sigma = \int_A \operatorname{div}(U) \, dxdt = \int_A \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) \, dxdt .$$

On obtient que sur tout ouvert A l'intégrale

$$\int_A \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} - S \right) dxdt = 0 ,$$

et comme l'expression intégrée est continue, elle est nécessairement nulle, d'où le résultat.

Théorème 2.5.4 *Soit U un champ conservatif de source S défini sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et Σ un arc de classe C^1 dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, dont la normale unitaire est notée ν . On suppose U continu sauf sur Σ . Alors la composante normale de U , c'est à dire $U \cdot \nu$, est continue le long de Σ .*

Démonstration. Soit (x, t) un point de Σ et $\epsilon > 0$ tel que le disque $D(x, t; \epsilon)$ de centre (x, t) et de rayon ϵ soit inclus dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On note Γ le cercle de centre (x, t) et de rayon ϵ , c'est à dire la frontière de $D(x, t; \epsilon)$, et n sa normale unitaire extérieure. L'arc Σ sépare $D(x, t; \epsilon)$ en deux parties notées A_1 et A_2 , dont les frontières respectives sont notées Γ_1 et Γ_2 , de normales unitaires extérieures respectives ν_1 et ν_2 . On notera U_1 la restriction de U à A_1 , puis U_2 la restriction de U à A_2 . On oriente cette construction de telle façon que $\nu_2 = \nu$ le long de Σ .

Comme U est un champ conservatif de source S , on a les trois relations

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U \cdot n \, d\sigma &= \int \int_{D(x, t; \epsilon)} S \, dxdt , \\ \int_{\Gamma_1} U_1 \cdot \nu_1 \, d\sigma &= \int \int_{A_1} S \, dxdt , \\ \int_{\Gamma_2} U_2 \cdot \nu_2 \, d\sigma &= \int \int_{A_2} S \, dxdt . \end{aligned}$$

Or

$$\int \int_{D(x, t; \epsilon)} S \, dxdt = \int \int_{A_1} S \, dxdt + \int \int_{A_2} S \, dxdt ,$$

et en notant $\Sigma_\epsilon = D(x, t; \epsilon) \cap \Sigma$, on remarque que

$$\int_{\Gamma} U \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} U_1 \cdot \nu_1 \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} U_2 \cdot \nu_2 \, d\sigma - \int_{\Sigma_\epsilon} (U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2) \, d\sigma .$$

On en déduit pour tout ϵ assez petit,

$$\int_{\Sigma_\epsilon} (U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2) \, d\sigma = 0 ,$$

et comme les quantités U_1 , U_2 , ν_1 et ν_2 sont continues, il vient, au point (x, t) ,

$$U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2 = 0 .$$

Par ailleurs, les normales ν_1 et ν_2 sont colinéaires et de signe opposé, c'est à dire que $\nu_1 + \nu_2 = 0$ sur Σ_ϵ . Comme on a pris $\nu_2 = \nu$, on a aussi $\nu_1 = -\nu$, d'où l'équation

$$(U_2 - U_1) \cdot \nu = 0 ,$$

en tout point de Σ , d'où le résultat.

Ce théorème peut aussi s'exprimer ainsi : "**la composante normale d'un champ conservatif est continue le long de tout arc de courbe du plan**". Autrement dit, seule la composante tangentielle est éventuellement discontinue. Ce résultat va nous permettre de caractériser les trajectoires des chocs.

Corollaire 2.5.5 *Dans les conditions du théorème précédent, en notant $U = (q, m)$ puis en supposant que l'arc Σ peut être représenté par une équation de la forme $x = x(t)$, on obtient la **Relation de Rankine-Hugoniot***

$$x'(t) (q_2 - q_1) = m_2 - m_1.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que ν est colinéaire au vecteur $(x'(t), -1)$, d'où, en notations matricielles

$$\begin{pmatrix} q_2 - q_1 \\ m_2 - m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ -1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

c'est à dire la relation recherchée.

2.5.1 Exemples, pour l'équation de Burgers

On veut résoudre la problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On recherche en fait un champ conservatif de composantes $q = u$ et $m = \frac{u^2}{2}$. Les caractéristiques vont propager les valeurs $(q_1, m_1) = (1, \frac{1}{2})$ en provenance des $x < 0$ à la vitesse $u = 1$, et les valeurs $(q_2, m_2) = (0, 0)$ à la vitesse $u = 0$. Il y a inévitablement rencontre des deux champs de caractéristiques le long d'une courbe d'équation $x = x(t)$, issue de $x = 0$, telle que la relation de Rankine Hugoniot soit satisfaite, c'est à dire ici,

$$x'(t) (0 - 1) = \left(0 - \frac{1}{2}\right) ,$$

d'où

$$x'(t) = \frac{1}{2} , \quad x(0) = 0 ,$$

et donc

$$x(t) = \frac{t}{2} .$$

La trajectoire du choc est une droite issue de l'origine et de vitesse $\frac{1}{2}$. La solution de notre problème est maintenant bien déterminée; elle est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{t}{2} \end{cases} .$$

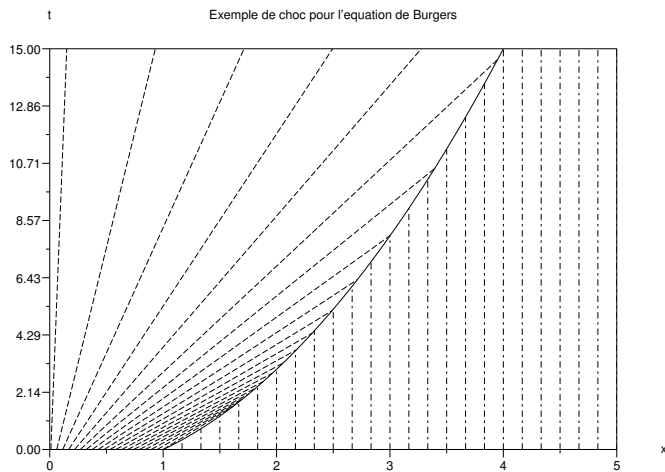
La trajectoire n'est pas toujours une droite. Reprenons l'équation de Burgers, avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases} .$$

Les caractéristiques ont pour équations

$$x' = u, \quad u' = 0,$$

d'où l'expression de la solution suivante : $u = 0$ le long des caractéristiques issues de $x < 0$ ou $x > 1$, $u = \frac{x}{1+t}$ le long des caractéristiques issues de $x \in]0, 1[$.



Il y a rencontre des champs caractéristiques issus des $x \in]0, 1[$ et des $x > 1$. La relation de Rankine Hugoniot donne ici

$$x'(t) \left(0 - \frac{x}{1+t} \right) = \left(0 - \frac{x^2}{2(1+t)^2} \right)$$

d'où

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2(1+t)}, \quad x(0) = 1 .$$

L'intégration de cette équation différentielle est immédiate et donne la trajectoire de choc

$$x(t) = \sqrt{1+t}.$$

On obtient la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{1+t} \\ \frac{x}{1+t} & \text{si } 0 \leq x < \sqrt{1+t} \end{cases}.$$

Cette solution est représentée dans la figure précédente.

Remarque 2.5.6 De façon générale, pour l'équation de Burgers, on a

$$x'(t) = \frac{m_2 - m_1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2},$$

qui exprime que la vitesse du choc est la moyenne arithmétique entre les vitesses des caractéristiques de part et d'autre du choc.

Pour une équation plus générale de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0,$$

on obtient, puisque $q = \phi$ et $m = f(\phi)$,

$$x'(t) = \frac{f(\phi_2) - f(\phi_1)}{\phi_2 - \phi_1} = f'(\theta), \quad \text{avec } \theta \text{ entre } \phi_1 \text{ et } \phi_2.$$

Il s'agit encore d'une moyenne, pondérée par la fonction de flux.

Remarque 2.5.7 Les trajectoires des chocs sont très fortement liées à l'écriture de la forme conservative de l'équation. Reprenons par exemple l'équation de Burgers en la multipliant par $2u$, pour obtenir

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2u^3}{3} \right) = 0$$

qui devient en posant $\phi = u^2$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0$$

avec $f(\phi) = \frac{2}{3} \phi^{\frac{3}{2}}$. En reprenant les mêmes données initiales, qui restent ici

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

la relation de Rankine Hugoniot donne

$$x'(t) = \frac{f(\phi_2) - f(\phi_1)}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{2}{3}.$$

Le choc se propage à la vitesse $\frac{2}{3}$ supérieure à la vitesse $\frac{1}{2}$ obtenue par la formulation conservative précédente. La trajectoire a été fortement modifiée, passant de $x = \frac{t}{2}$ à $x = \frac{2t}{3}$. Ainsi, une simple opération algébrique peut fortement modifier les trajectoires des chocs. La raison en est que les dérivées des profils u ou ϕ s'interprètent au niveau des discontinuités comme des impulsions, et non plus comme des fonctions, et on se retrouve en dehors du contexte classique des algèbres de fonctions.

2.5.2 Caractérisation des chocs : la condition d'entropie

Nous avons observé l'apparition d'un choc lorsqu'il y avait rencontre de caractéristiques, et nous avons ensuite construit une caractérisation de la trajectoire de ce choc, à savoir la condition de Rankine Hugoniot. Cependant, cette condition peut aussi s'adapter à d'autres chocs qui ne correspondent pas à des rencontres de caractéristiques. Ces chocs ne sont pas attendus, ils n'ont pas de signification physique et il devient nécessaire de disposer d'un nouveau critère qui va sélectionner les "bons chocs", c'est à dire les chocs physiquement compatibles.

Par exemple, toujours pour l'équation de Burgers, avec maintenant la donnée initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} ,$$

on observe que les deux solutions (différentes !) suivantes sont possibles :

$$u_1(x, t) = u(x, 0) ,$$

et

$$u_2(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{si } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases} .$$

Elles correspondent en effet toutes les deux à des champs conservatifs. La solution u_2 est continue, tandis que la solution u_1 présente un choc stationnaire, c'est à dire de vitesse nulle, de trajectoire $x = 0$, qui est parfaitement compatible avec la condition de Rankine Hugoniot. En effet on a bien $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, donc $\frac{u_1 + u_2}{2} = 0$, qui exprime que le choc est bien de vitesse nulle, et ensuite, en intégrant $x'(t) = 0$ à partir de $x = 0$ si $t = 0$, on retrouve bien la trajectoire $x = 0$. Cependant, cette trajectoire ne correspond pas du tout à un lieu de rencontre de caractéristiques issues des données initiales.

Pour assurer qu'une rencontre de caractéristiques issues de la donnée initiale a bien lieu, il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire appelée **condition d'entropie** parce qu'elle impose physiquement qu'aucune création d'énergie ne peut apparaître spontanément. Notons $\phi(x - 0, t)$ la valeur de ϕ à gauche d'un point (x, t) d'une trajectoire de choc, et $\phi(x + 0, t)$ la valeur de ϕ à droite de ce point. Si la vitesse des caractéristique est notée $\lambda(\phi)$, il y a rencontre des caractéristique lorsque

$$\lambda(\phi(x - 0, t)) \geq x'(t) \geq \lambda(\phi(x + 0, t)) .$$

Si l'équation d'onde est de la forme suivante, en supposant $f \in C^2(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0 ,$$

on a $\lambda(\phi) = f'(\phi)$, et la condition exige

$$f'(\phi(x - 0, t)) \geq f'(\phi(x + 0, t)) ,$$

ou encore

$$\frac{f'(\phi(x + 0, t)) - f'(\phi(x - 0, t))}{\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)} (\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)) \leq 0 .$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une valeur θ comprise entre $\phi(x - 0, t)$ et $\phi(x + 0, t)$ telle que

$$f''(\theta) (\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)) \leq 0 .$$

On peut en déduire les résultats suivants :

Proposition 2.5.8 *La condition d'entropie est compatible pour un choc **décroissant** lorsque f est **convexe**, ou encore pour un choc **croissant** lorsque f est **concave**.*

Remarquons que dans les autres cas, c'est à dire pour une discontinuité croissante avec f convexe, ou encore une discontinuité décroissante avec f concave, il y a toujours une solution régulière possible. En effet, dans ces deux cas, la fonction f' est monotone, donc inversible, et il suffit d'inverser la relation

$$f'(\phi) = \frac{x - x_0}{t} ,$$

où x_0 est le point où se situe la discontinuité. On obtient

$$\phi(x, t) = [f']^{-1} \left(\frac{x - x_0}{t} \right) \quad \text{pour } f'(\phi_1)t < x \leq f'(\phi_2)t ,$$

en notant ϕ_1 et ϕ_2 les valeurs à gauche et à droite de la discontinuité initiale en x_0 .

Une telle onde est souvent appelée **onde de détente**, ou encore **onde de raréfaction**.

Remarque 2.5.9 *Dans le cas général, lorsqu'il n'y a aucune hypothèse de convexité sur f , on peut sélectionner les chocs compatibles avec la condition d'entropie en procédant de la façon suivante, au niveau d'une discontinuité initiale de valeurs ϕ_1 et ϕ_2 à gauche et à droite respectivement.*

Si $\phi_1 < \phi_2$ (discontinuité croissante) on remplace f par son enveloppe convexe sur l'intervalle $[\phi_1, \phi_2]$. Les chocs qui subsistent sont compatibles.

Si $\phi_1 > \phi_2$ (discontinuité décroissante) on remplace f par son enveloppe concave sur l'intervalle $[\phi_2, \phi_1]$. Les chocs qui subsistent sont compatibles.

Notons que les chocs qui subsistent correspondent à des parties rectilignes de l'enveloppe convexe ou concave, suivant le cas.

Remarque 2.5.10 *Dans le cas d'une discontinuité linéairement dégénérée, il n'y a pas de rencontres de caractéristiques possibles, et bien entendu pas de chocs possibles au sens où ils correspondent à des rencontres de caractéristiques. Il peut cependant y avoir des discontinuités, qui sont transportées par la vitesse $\lambda(x, t)$, qui sont appelées des **discontinuités de contact**.*

2.5.3 L'unicité

Il existe un résultat d'unicité de la solution vérifiant la condition d'entropie, qui est dû à S.N.Kruzkov et O.A.Oleinik, que l'on peut énoncer ainsi :

Théorème 2.5.11 *Si la donnée initiale ϕ_0 est bornée et continue par morceaux, si S vérifie une condition de Lipschitz et si $f \in C^1(\mathbb{R})$, il existe une solution unique de l'équation*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 , \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x)$$

appartenant à l'espace B_0 et compatible avec la condition d'entropie.

Ce théorème est admis, sa démonstration étant relativement technique. Il est important de noter que les fonctions de B_0 sont **bornées**, et l'unicité n'est possible que dans un espace de fonctions bornées comme le montre l'exemple suivant.

On reprend l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

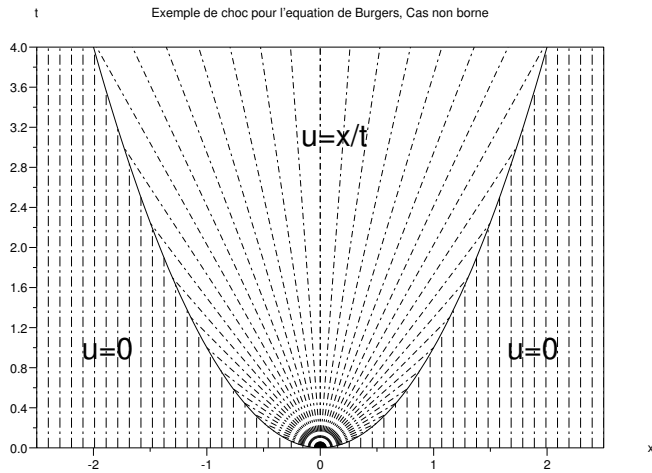
avec la donnée initiale

$$u(x, 0) = 0 .$$

Il existe une solution triviale $u(x, t) = 0$ qui est bien unique compte tenu du théorème précédent. On peut cependant noter que la fonction v définie par

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{x}{t} & \text{si } |x| < \sqrt{t} \end{cases} ,$$

est également une solution qui comporte deux discontinuités le long des trajectoires $x = -\sqrt{t}$ et $x = \sqrt{t}$, qui sont toutes les deux décroissantes, donc compatibles avec la condition d'entropie. On observe aussi que cette solution v n'est pas bornée au voisinage de l'origine, lorsque t est petit. Elle n'entre donc pas dans le cadre d'application du théorème, et doit être rejetée.



2.6 La discrétisation des équations d'ondes

Nous ne ferons qu'aborder le sujet, ce problème étant relativement complexe dans un cadre général. Plusieurs techniques peuvent s'adapter suivant les propriétés de l'équation. Une première technique consiste à reprendre la notion de caractéristiques et d'intégrer le système caractéristique à partir de plusieurs (et nombreux) points de la donnée initiale. On reprend alors pour chacun de ces points de départ, une méthode adaptée au système différentiel, comme on l'a fait au chapitre 1. Cette technique n'est cependant pas bien adaptée au cas vraiment non linéaire, lorsqu'il y a rencontre de caractéristiques. Elle est au contraire bien adaptée au cas linéairement dégénéré, parce que de telles rencontres des caractéristiques ne peuvent pas avoir lieu.

2.6.1 Quelques schémas aux différences finies

Dans le cas d'un champ conservatif, les méthodes de **différences finies** sont assez faciles à utiliser. Nous allons proposer deux méthodes, appelées ici des **schémas**. Pour commencer, il nous faut introduire une **discrétisation** des variables de position et d'évolution. On introduit un paramètre réputé petit à l'échelle de la dimension x , noté Δx , positif, puis on pose pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $x_j = j\Delta x$. Bien entendu, en pratique, on se limitera à une partie finie de \mathbb{Z} . De la même façon, on introduit un paramètre de discrétisation pour la variable d'évolution, noté Δt , positif lui aussi, et on pose $t_n = n\Delta t$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui se limitera aussi en une partie finie de \mathbb{Z} en pratique.

On considère une équation de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 ,$$

avec une donnée initiale $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$.

L'approximation de $\phi(x_j, t_n)$ sera notée ϕ_j^n . Les premières valeurs sont obtenues à partir de la donnée initiale, soit par **interpolation**, en posant

$$\phi_j^0 = \phi_0(x_j) ,$$

soit par **projection**, en prenant

$$\phi_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \phi_0(\xi) d\xi .$$

Un **schéma numérique explicite à $2k+1$ points** consiste en une ou plusieurs formules permettant de construire les valeurs ϕ_j^{n+1} à partir des valeurs voisines

$$\phi_{j-k}^n, \phi_{j-k+1}^n, \dots, \phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \phi_{j+1}^n, \dots, \phi_{j+k-1}^n, \phi_{j+k}^n .$$

On se limite en général à de petites valeurs de k , par exemple $k = 1$ ou $k = 2$.

Le **schéma de Lax-Friedrichs** est certainement le plus élémentaire des schémas à 3 points. Les valeurs ϕ_j^n étant toutes connues, on commence par construire les valeurs intermédiaires $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ par la formule

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)) - \frac{\Delta t}{2} S\left(\frac{\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{2}\right) .$$

Une fois toutes ces valeurs acquises, on reprend la même formule, en indices décalés, pour construire les valeurs ϕ_j^{n+1} , c'est à dire

$$\phi_j^{n+1} = \frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(f(\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \right) - \frac{\Delta t}{2} S\left(\frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right).$$

Il s'agit d'un schéma à trois points, et de ce fait, il faut éviter que les caractéristiques issues des autres points puissent venir perturber chaque valeur ϕ_j^{n+1} ; il suffit pour cela de choisir Δt suffisamment petit pour qu'une caractéristique ne puisse pas franchir une distance supérieure à la distance Δx pendant la durée Δt . La vitesse étant égale à $f'(\phi)$, il suffit d'exiger pour chaque valeur de t_n atteinte,

$$\sup_{|u| \leq M_n} |f'(u)| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{où} \quad M_n = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\phi_j^n|.$$

Cette condition est appelée la **condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy** ou plus simplement **condition CFL**. Il s'agit d'une condition suffisante, mais les utilisateurs de ce schéma ont tous fait l'expérience de graves instabilités lorsque cette condition n'est pas respectée. En particulier elle assure la conservation de la positivité dans le cas homogène. Il existe des résultats de convergence de la solution construite par ce schéma vers la solution compatible avec la condition d'entropie, sous la condition CFL, et dans le cadre du théorème de la section précédente. Du point de vue de la précision, ce schéma donne des résultats plutôt médiocres, en particulier au niveau des chocs, qui sont fortement étalés (ou **diffusés**) sur plusieurs points de la discrétisation.

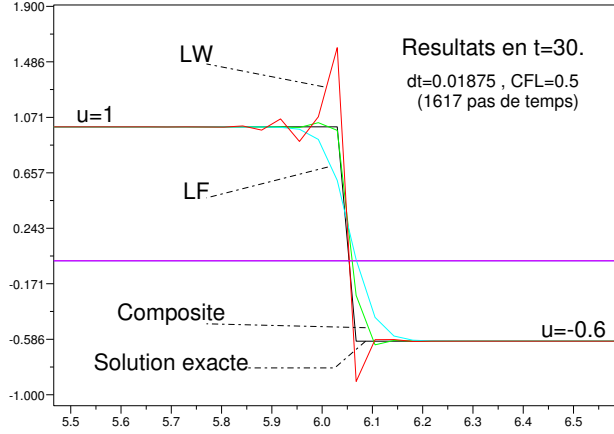
Le **schéma de Lax-Wendroff** permet de gagner en précision, mais quelquefois au détriment de la qualité de la stabilité; en effet on peut voir apparaître des oscillations qui altèrent la qualité du résultat. La première étape est la même que précédemment, pour le schéma de Lax-Friedrichs, pour calculer les valeurs $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir des ϕ_j^n . La seconde étape calcule les valeurs ϕ_j^{n+1} par la formule suivante

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \right) - \Delta t S\left(\frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right).$$

Comme précédemment pour le schéma de Lax-Friedrichs, s'agissant de schémas à trois points, la condition de stabilité CFL est exigée. Ce schéma est précis à l'ordre deux, en ce sens que la dernière formule correspond à une approximation de l'équation à l'ordre deux au point $(x_j, t_n + \frac{\Delta t}{2})$.

Le **schéma composite de B.Wendroff** consiste à utiliser les deux schémas précédents de telle façon que les inconvénients de chacun se corrigent mutuellement en accumulant leurs qualités respectives. Il consiste à reprendre la première étape pour calculer les valeurs $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir des ϕ_j^n , puis de choisir l'une des deux secondes étapes en fonction d'un dosage simple, par exemple sur 20 pas de temps (pour aller par exemple de t_n à t_{n+20}) faire 19 étapes de Lax-Wendroff, suivie d'une étape de Lax-Friedrichs. Le résultat est surprenant : les effets de diffusion de Lax-Friedrichs et les oscillations de Lax-Wendroff ont tous les deux presque disparu, ce qui est un gain de stabilité, et la qualité de la précision de Lax-Wendroff est maintenue. Du point de vue de la programmation, la

modification à apporter à chaque pas de temps est minimale. La figure ci dessous présente un résultat de calcul obtenu pour l'équation de Burgers sur ces trois schémas.

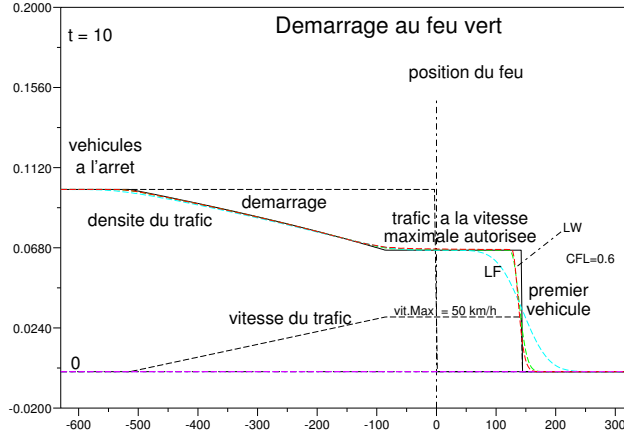


Ces trois schémas ont été appliqués à l'exemple du démarrage au feu vert. On observe dans ce cas que le schéma de Lax-Wendroff et le schéma composite ont un bon comportement, notamment au niveau du premier véhicule. Ce n'est plus du tout le cas pour les résultats obtenus par le schéma de Lax-Friedrichs, où on observe une importante diffusion numérique. Ces résultats ont été calculés avec un CFL égale à 0.6, ce qui donne une CFL effective beaucoup plus petite au niveau du premier véhicule. En effet la CFL est globalement ajustée en fonction de l'onde la plus rapide, qui est ici l'onde de démarrage qui remonte la file de véhicules en attente, ce qui impose une CFL contraignante, pour laquelle le schéma de Lax-Friedrichs devient moins performant. On peut constater qu'au niveau de la valeur ϕ_* les trois schémas ont donné une valeur correcte. L'onde de démarrage est également bien reproduite.

2.6.2 Une méthode de volumes finis

Une autre technique de discrétisation, la **méthode des volumes finis**, consiste à effectuer un bilan sur chaque élément ou **volume fini** du maillage. Ces éléments sont ici les mailles $M_j =]x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}[$, centrées aux **noeuds** x_j .

L'idée de cette méthode consiste à effectuer un bilan dans chaque maille M_j en tenant compte des échanges avec les deux mailles voisines M_{j-1} et M_{j+1} . Ces échanges sont exprimés par les termes de flux, et la méthode est plutôt adaptée aux équations d'onde correspondant à un champ conservatif.



On considère une équations de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 ,$$

et on évalue les échanges à l'**interface** $x_j + \frac{\Delta x}{2}$ à un instant t_n . Si la vitesse est positive, la propagation se fait depuis M_j vers M_{j+1} , ce qui revient à débiter M_j d'une certaine quantité, proportionnelle à Δt , de la forme $\Delta t f(\phi_j^n)$, pour créditer M_{j+1} de la même quantité. Si au contraire, la vitesse est négative, la propagation se fait depuis M_{j+1} vers M_j , ce qui revient cette fois à créditer M_j d'une certaine quantité, proportionnelle à Δt , de la forme $\Delta t f(\phi_{j+1}^n)$, en débitant d'autant M_{j+1} .

Dans le cas général on note

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = \text{signe} (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) ,$$

puis $I_{j+\frac{1}{2}}^n$ l'intervalle dont les extrémités sont ϕ_j^n et ϕ_{j+1}^n . Précédemment, on a vu qu'on assurait la condition d'entropie en prenant en compte l'enveloppe convexe ou concave sur la discontinuité initiale. On va procéder ici de la même façon. Si la discontinuité est croissante, on a $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1$, et on doit prendre l'enveloppe concave de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. La partie décroissante, s'il y en a, va provoquer un flux vers M_j et la partie croissante, un flux vers M_{j+1} . Le flux résiduel à l'interface est donc réalisé au minimum de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Si au contraire, la discontinuité est décroissante, on a $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1$, et on doit prendre l'enveloppe convexe de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Ici encore, la partie décroissante, s'il y en a, va provoquer un flux vers M_j et la partie croissante, un flux vers M_{j+1} . Le flux résiduel à l'interface est donc réalisé au maximum de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. On peut réunir ces deux remarques, et les généraliser,

en posant

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n \operatorname{Inf}_{k \in I_{j+\frac{1}{2}}^n} \left(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n f(k) \right) ,$$

qui correspond au flux échangé à l'interface. Le bilan sur la maille M_j entre les instants t_n et $t_n + \Delta t$ s'obtient facilement en écrivant que le champ est conservatif de source S sur $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$. On obtient, en utilisant les flux $A_{j+\frac{1}{2}}^n$ obtenus aux interfaces,

$$\Delta x \phi_j^{n+1} = \Delta x \phi_j^n - \Delta t A_{j+\frac{1}{2}}^n + \Delta t A_{j-\frac{1}{2}}^n - \Delta t \Delta x S(\phi_j^n) ,$$

en considérant ϕ_j^{n+1} comme une projection sur M_j à l'instant t_{n+1} dans le calcul de l'intégrale sur le bord de $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$, en effectuant une approximation pour évaluer l'intégrale du terme source sur $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$. En divisant par Δx on obtient le schéma suivant

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{j+\frac{1}{2}}^n - A_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta t S(\phi_j^n)$$

connu sous le nom de **schéma de Godunov**. Ici encore, dans la mesure où on restreint les échanges entre deux mailles voisines au maximum, le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ doit satisfaire à la **condition de Courant-Friedrichs-Lewy**

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (|f'(\xi)|) \leq 1 .$$

L'évaluation du flux d'interface $A_{j+\frac{1}{2}}^n$ est en pratique relativement facile : il suffit de tester les deux extrémités de l'intervalle $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, c'est à dire ϕ_j^n et ϕ_{j+1}^n , et les extréma éventuels de f situés dans cet intervalle $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Un **solveur de Riemann** est constitué des instructions permettant de déterminer les flux d'interface $A_{j+\frac{1}{2}}^n$. Si par exemple f est monotone croissante sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, on aura

$$f(\phi_j^n) < f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1 ,$$

ou

$$f(\phi_j^n) > f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1 ,$$

si bien que dans chaque cas, le minimum est réalisé en ϕ_j^n . On obtient alors

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = f(\phi_j^n) \quad \text{si} \quad f \text{ est monotone croissante sur } I_{j+\frac{1}{2}}^n .$$

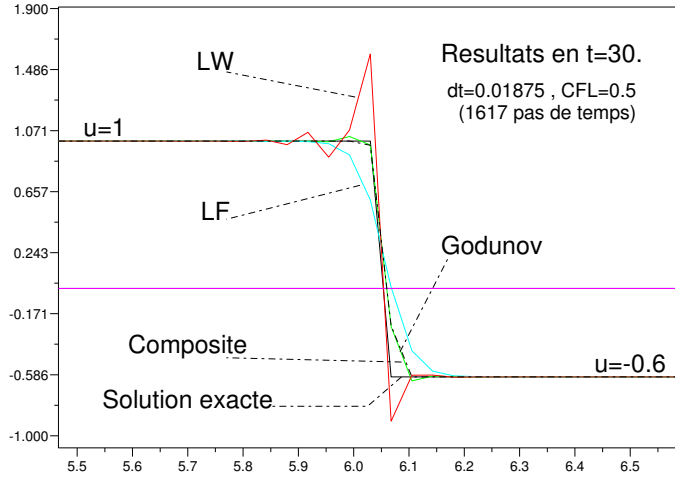
Si f est toujours **monotone croissante**, le schéma de Godunov se réduit à

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(\phi_j^n) - f(\phi_{j+1}^n) \right) - \Delta t S(\phi_j^n) ,$$

appelé aussi **schéma décentré**.

Dans le cas contraire, si f est **monotone décroissante** sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, on aura

$$f(\phi_j^n) < f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1 ,$$



ou

$$f(\phi_j^n) > f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1 ,$$

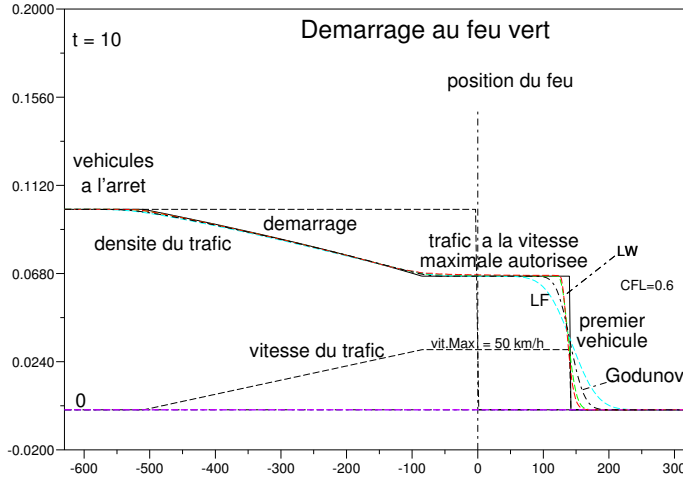
si bien que dans chaque cas, le minimum est réalisé en ϕ_{j+1}^n . On obtient alors

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad f \text{ est monotone décroissante.}$$

On retrouve un schéma décentré, dans l'autre sens bien sûr,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)) - \Delta t S(\phi_j^n) .$$

Nous présentons ici deux résultats obtenus par le schéma de Godunov, dans les mêmes conditions que les résultats obtenus précédemment pour les autres schémas. On observe effectivement les qualités de stabilité du schéma de Godunov, mais sa précision reste d'ordre un. Au niveau des chocs, il améliore nettement la raideur de la pente par rapport au schéma de Lax-Friedrichs, notamment en ce qui concerne la discontinuité de contact pour l'exemple du trafic routier. Il reste cependant bien en retrait de la performance du schéma composite de Wendroff, pour des temps de calcul équivalents.



2.6.3 Un dernier exemple

On considère l'équation de Burgers avec terme source

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = k (u - u_*) \quad ,$$

où $k > 0$ et $u_* \in \mathbb{R}$ sont des constantes données. Cette équation a une propriété intéressante, elle admet une solution non constante qui se propage avec une vitesse constante que nous allons déterminer. Notons A cette vitesse; la solution recherchée est aussi solution de l'équation linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad .$$

Après soustraction des deux équations, il reste

$$(u - A) \frac{\partial u}{\partial x} = k (u - u_*) \quad ,$$

et en faisant $u = u_*$, il vient nécessairement $A = u_*$ si la solution n'est pas constante ($\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$). On en déduit également

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \quad .$$

En intégrant, on obtient une solution de la forme

$$u = k x - B(t) ,$$

et on détermine $B(t)$ en dérivant par rapport à t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - B'(t) ,$$

et comme par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - u_* \frac{\partial u}{\partial x} = - u_* k ,$$

on en déduit que la solution est de la forme

$$u(x, t) = k (x - u_* t) + C$$

où C est bien une constante.

On va maintenant construire une solution bornée en s'inspirant de ce calcul. On prendra cette solution égale à u_* en dehors d'un intervalle de longueur $2L$, pour $L > 0$ donné, et constituée de deux parties de la forme ci dessus, séparées par un choc, qui devra lui aussi se déplacer à la vitesse constante u_* . A l'instant initial, cet intervalle est défini par $[x_0, x_0 + 2L]$, le point x_0 servant simplement à le positionner. On obtient la formulation suivante de la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_* & \text{si } x \leq x_0 + u_* t \\ u_* + k (x - x_0 - u_* t) & \text{si } x_0 + u_* t \leq x < x_0 + u_* t + L \\ u_* + k (x - x_0 - u_* t - 2L) & \text{si } x_0 + u_* t + L < x \leq x_0 + u_* t + 2L \\ u_* & \text{si } x \geq x_0 + u_* t + 2L \end{cases} .$$

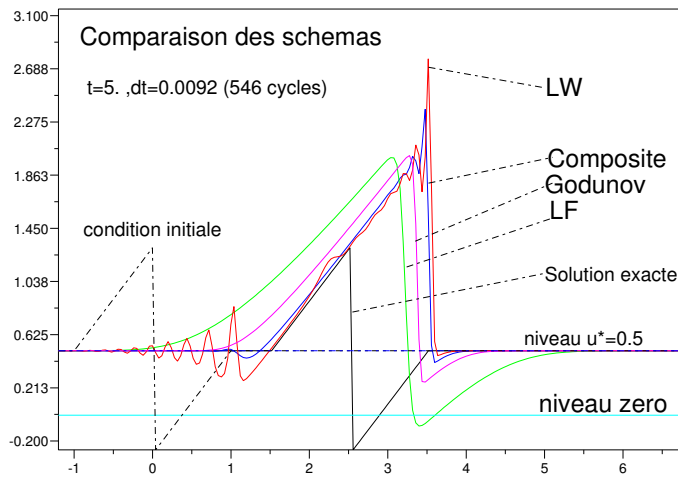
Cette solution présente un choc en $x = x_0 + u_* t + L$, sa valeur à gauche étant $u_1 = u_* + kL$ et sa valeur à droite étant $u_2 = u_* - kL$. La relation de Rankine Hugoniot donne donc

$$x'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2} (u_* + kL + u_* - kL) = u_* ,$$

qui est bien la vitesse de choc attendue. De plus ce choc est décroissant, et comme $f(u) = \frac{u^2}{2}$ est convexe, il est bien compatible avec la condition d'entropie.

On se propose maintenant de tester les différents schémas sur cet exemple.

La prise en compte de la condition initiale est la même pour tous les schémas ; il s'agit d'une simple interpolation qui ne respecte pas rigoureusement la symétrie par rapport à la valeur d'équilibre $u_* = \frac{1}{2}$ ici. Il y a 200 pas d'espace, et la CFL est très petite (au moins au début, puisqu'ensuite elle augmente avec la croissance de la solution approchée). On observe une croissance maintenue de la solution par chacun des schémas, et la solution proposée ci dessus n'est pas du tout approchée comme on aurait pu l'espérer. La solution approchée devient en moyenne supérieure à u_* , et de ce fait le terme source apporte de l'énergie qui ne disparaît pas suffisamment dans le choc comme c'est le cas pour la solution exacte. Ceci illustre la nécessité d'adaptation des schémas aux termes sources, toujours très délicate. En fait, on préconise, pour le maintien des équilibres,



une intervention "manuelle" au niveau du schéma, qui le force à conserver son équilibre. Cette intervention utilise des développements mathématiques, bien entendu.

Cet exemple représente dans un modèle simplifié des phénomènes qui apparaissent notamment dans des problèmes de géophysique, comme les cyclones, les tsunamis, le mascaret ou les vagues de surf sur une plage, dont la simulation numérique est effectivement très délicate.

Chapitre 3

Des ondes moins classiques

3.1 Quelques applications en économie

3.1.1 Les équations de Black-Scholes à faible volatilité

En finance, une option d'achat (un "call") est un contrat à terme concernant un produit financier (un "actif") sous-jacent. L'idée de Black et Scholes a été, au début des années 1970, d'étudier le rapport entre le prix implicite de l'option et la variation de prix de l'actif sous-jacent. Scholes a obtenu le prix Nobel d'économie en 1997, partagé avec Merton, pour ces travaux (Black étant décédé en 1995). Il s'agit de prévoir la valeur théorique de l'option aura au terme du contrat, en fonction de données actuelles, et essentiellement de savoir si cette valeur sera inférieure ou supérieure au prix d'exercice E fixé au contrat. La valeur effective de l'option est ainsi, à l'échéance T ,

$$C(S, T) = \text{Max}(S - E, 0) ,$$

où S est le prix effectif de l'actif sous-jacent.

On notera τ l'instant courant (actuel) et

$$t = T - \tau ,$$

le temps restant avant l'échéance de l'option, qui sera notre variable d'évolution.

La variation en temps du prix de l'actif sous-jacent S est due à un taux de rendement μ propre de l'actif, et à un facteur aléatoire représenté par un mouvement brownien (ou bruit blanc) de coefficient σ (> 0) appelé la **volatilité**. Ceci se traduit par une relation de la forme

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta\tau + \sigma \Delta W ,$$

pendant une durée $\Delta\tau$ et pour un effet de volatilité $\sigma\Delta W$ pendant cette durée $\Delta\tau$, où W représente ce mouvement brownien ; on admet la caractérisation de ce mouvement brownien par

$$\frac{(\Delta W)^2}{\Delta\tau} \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad \Delta\tau \longrightarrow 0 .$$

On utilise maintenant le

Lemme de Ito : Soit F une fonction des variables S et τ , suffisamment régulière. Alors la variation ΔF de F entre les instants τ et $\tau + \Delta t$ est donnée par

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta \tau + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta W + \Delta \tau \epsilon(\Delta t) ,$$

où $\epsilon(\Delta \tau)$ tend vers zéro quand $\Delta \tau$ tend vers zéro.

On obtient ce résultat par un simple développement à l'ordre un, en remarquant que

$$\Delta S^2 = \sigma^2 S^2 \Delta W^2 + \Delta \tau \epsilon_1(\Delta \tau) = \sigma^2 S^2 \Delta \tau + \Delta \tau \epsilon_2(\Delta \tau) ,$$

où $\epsilon_1(\Delta \tau)$ et $\epsilon_2(\Delta \tau)$ tendent vers zéro lorsque $\Delta \tau$ tend vers zéro. Le développement est donné par :

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial \tau} \Delta \tau + \frac{\partial F}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \Delta S^2 + \Delta \tau \epsilon_0(\Delta \tau) ,$$

et en utilisant l'expression de ΔS , il vient

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta \tau + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta W + \Delta t \epsilon(\Delta \tau) ,$$

où $\epsilon_0(\Delta \tau)$ et $\epsilon(\Delta \tau)$ tendent vers zéro lorsque $\Delta \tau$ tend vers zéro.

On applique ce résultat à la valeur de l'option $C(S, \tau)$. On a donc la formule

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta \tau + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta W ,$$

en restriction aux termes du premier ordre. Les termes en $\epsilon(\Delta \tau)$ tendant vers zéro lorsque $\Delta \tau$ tend vers zéro disparaîtront dans d'ultérieurs passages à la limite, et il n'est donc pas nécessaire de les écrire à chaque ligne de calcul.

Le gestionnaire va chercher à se prémunir contre le risque que représente le terme en ΔW . Pour cela, il va constituer un portefeuille dans lequel il va mettre l'option qui nous intéresse, et d'autres actifs de même valeur S que l'actif sous-jacent, et chercher à contrôler les variations de ce portefeuille de façon à éliminer le risque. Si $-\gamma$ est le nombre de ces actifs additionnels (notons que γ peut très bien être négatif ou positif, suivant les ventes et les achats), la variation de la valeur du portefeuille est donnée par

$$\Delta P = \Delta C - \gamma \Delta S .$$

On en déduit, en utilisant l'expression de ΔC donnée par le Lemme de Ito,

$$\Delta P = \left(\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \mu \gamma S \right) \Delta \tau + \sigma S \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \gamma \right) \Delta W ,$$

et il apparaît immédiatement que le choix

$$\gamma = \frac{\partial C}{\partial S}$$

annule le coefficient de ΔW et fait donc disparaître systématiquement le risque. Notons qu'une autre simplification apparaît également :

$$\mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \mu \gamma S = 0 ,$$

et il n'y a plus non plus d'influence du paramètre μ , le taux de rendement de l'actif. En divisant par $\Delta \tau$, on obtient l'équation

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial P}{\partial \tau} .$$

Il reste à évaluer $\frac{\partial P}{\partial \tau}$. On réintroduit un paramètre de taux de rendement r et on écrit que la variation de la valeur du portefeuille est fonction de ce taux de rendement, par une expression de la forme

$$\Delta P = r \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \Delta \tau ,$$

le facteur $C - S \frac{\partial C}{\partial S}$ restant proche de P , la valeur du portefeuille. Ceci permet d'obtenir

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = r \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) ,$$

et d'éliminer P de l'équation en C , pour établir

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) .$$

Il s'agit de **l'équation de Black-Scholes** :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - r C = 0 .$$

Nous allons préférer l'écrire en utilisant une variable d'évolution progressive, le temps avant l'échéance T c'est à dire $t = T - \tau$, ce qui change simplement un signe, lorsqu'on utilise la même notation pour les fonctions C , puisqu'alors

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial C}{\partial \tau} .$$

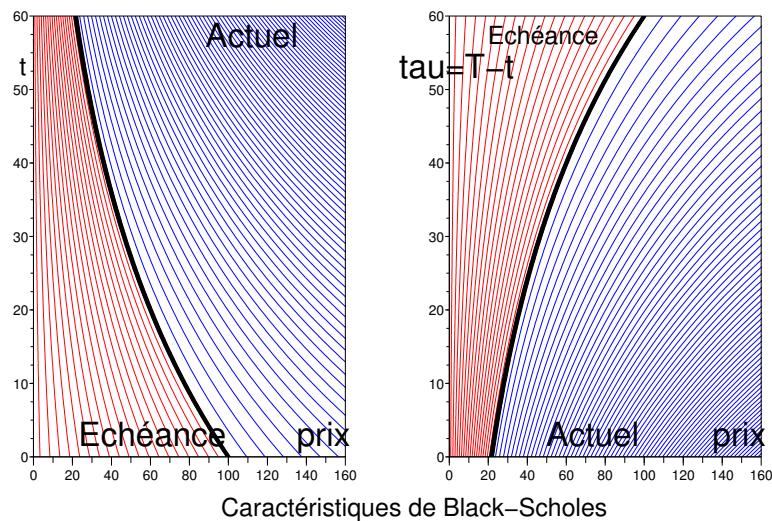
La nouvelle expression de l'équation de Black-Scholes est devenue

$$\frac{\partial C}{\partial t} - r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - r C = 0 .$$

On reconnaît une équation de type parabolique, dans la mesure où un terme d'ordre deux est présent.

On s'intéresse au cas où la volatilité est faible, pour observer l'effet des termes du premier ordre, ceux qui pilotent éventuellement la propagation d'une onde. On pose $u = \frac{\partial C}{\partial S}$, et on dérive l'équation de Black-Scholes : il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - r u - r S \frac{\partial u}{\partial S} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - S \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + r u = 0 .$$



On remarque que le terme ru s'élimine, et on retire maintenant le terme du second ordre, pour ne retenir qu'une équation d'onde **homogène** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (r + \sigma^2) S \frac{\partial u}{\partial S} = 0 .$$

La condition d'échéance,

$$C(S, T) = \text{Max}(S - E, 0) ,$$

se traduit par une **condition initiale** ,

$$C(S, 0) = \text{Max}(S - E, 0) ,$$

lorsque la variable d'évolution est t . Cette condition initiale est constante par morceaux en ce qui concerne la variable u . On obtient

$$u(S, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \geq E \\ 0 & \text{si } S < E \end{cases} .$$

On est amené à résoudre un problème de Riemann, ce qui se fait facilement par les caractéristiques, d'équation

$$S'(t) = - (r + \sigma^2) S ,$$

et dont la solution générale est

$$S(t) = S_0 e^{-(r+\sigma^2)t} .$$

La figure précédente représente le champ de caractéristiques obtenues, entre l'instant actuel, $t = 0$ ou $\tau = T$ et l'échéance T , c'est à dire $t = T$ ou $\tau = 0$. La zone en gras correspond à une courbe critique. A droite de cette zone, où les caractéristiques sont tracées en bleu, le gestionnaire va retirer un bénéfice, proportionnel à la distance à la courbe critique, et pourra en conséquence accepter l'option. A gauche de cette courbe critique, il n'y aura pas de bénéfice, mais au contraire une perte, et le gestionnaire va refuser l'option. On constate que la prédiction est délicate lorsque, à l'instant actuel, le prix de l'option est proche de la courbe critique, c'est à dire la valeur critique

$$S_c = E e^{-(r+\sigma^2)T} .$$

Rappelons qu'il faut en plus tenir compte de la diffusion due au terme d'ordre deux que nous n'avons pas pris en compte, qui rend encore plus flou le comportement au voisinage de la courbe critique. Cette courbe critique peut s'interpréter comme une courbe de choc ou de discontinuité pour la variable $u(S, t)$, et comme l'équation d'onde est linéaire, il s'agit d'une **discontinuité de contact**. Les calculs ont été effectués avec $r = 0.25$, $\sigma = 0.82$, $T = 5$, $E = 100$, lorsque l'unité de temps est l'année. L'unité de temps pour la représentation de la figure est le mois. Le choix de ces données, relativement importantes permet de constater la courbure exponentielle des caractéristiques.

3.1.2 Les effets colatéraux des modifications de la T.V.A.

On s'intéresse à la réaction des consommateurs lors de l'augmentation du taux de T.V.A. sur une classe de produits. On suppose qu'il ne s'agit pas de produits vraiment indispensables, et qu'il peut donc y avoir différents niveaux de réaction, allant de la forte réduction de la consommation à une réaction plus mitigée ou résignée. La variable d'évolution, notée t , est ici le taux de T.V.A., qui, dans nos applications passera de la valeur $t_0 = 0.055$, pour 5.5%, à $t_s = 0.196$, pour 19.6%. La variable de position x correspond à une échelle de budget annuel. Ainsi, on considère que la nombre de consommateurs assurant un budget de dépenses, pour cette classe de produits, situé entre les valeurs x et $x + \Delta x$, est égal à $q(x, t) \Delta x$, lorsque le taux de T.V.A. est égal à t . On introduit ainsi une densité notée $q(x, t)$ de consommateurs assurant un budget annuel x lorsque le taux de T.V.A. est égal à t . Lorsque le taux de T.V.A. est égal à t , la recette fiscale est

$$R(t) = \frac{t}{1+t} \int_0^\infty x q(x, t) dx .$$

Dans l'hypothèse d'une totale passivité des consommateurs, l'augmentation de la recette fiscale serait de 214.35%, en passant de t_0 à t_s . La réaction des consommateurs peut nettement réduire cette recette fiscale.

Cette réaction va se traduire par un déplacement sur l'échelle des budgets, correspondant à une vitesse négative. Pour se fixer les idées, cette vitesse sera de la forme

$$u(x, t) = - \frac{M x t}{1 + (x - a)^2} ,$$

où M est une constante contrôlant la réactivité (elle sera appelée **constante de réactivité**), et a est un paramètre permettant de fixer la valeur maximale de u , atteinte en $x = 1 + a$, la valeur de u étant alors

$$u(1 + a, t) = - \frac{M t (1 + a)}{2} ,$$

et permet d'ajuster une réactivité sectorielle particulière : le rejet sera plus important chez les consommateurs dont le budget est proche de la valeur $1 + a$. En pratique le choix $a = 0$ est tout à fait judicieux, s'il n'y a pas de réactivité sectorielle.

Cette vitesse est indépendante de q , c'est à dire que la réaction n'a rien de collective. Elle est faible pour les petits budgets, dont la consommation restera faible, et aussi pour les gros budgets, traduisant une certaine passivité des consommateurs correspondant à cette catégorie. La densité q et la vitesse u induisent le flux qu , et on obtient une équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (qu) = 0 .$$

On se propose de résoudre cette équation lorsque la condition initiale, c'est à dire l'état lorsque le taux de T.V.A. est égal à t_0 , est par exemple de la forme

$$q_0(x) = K x^2 e^{-mx}$$

pour traduire une certaine rareté des consommateurs pour les faibles budgets et aussi pour les gros budgets. Le paramètre m permet de fixer le maximum de $q_0(x)$, atteint pour $x = \frac{2}{m}$.

Les caractéristiques sont obtenues en résolvant l'équation différentielle

$$x'(t) = u(x(t), t) ,$$

c'est à dire

$$x'(t) = - \frac{M x(t) t}{1 + (x(t) - a)^2} ,$$

pour une chaque valeur de budget x_0 lorsque $t = t_0$. L'intégration est immédiate, en séparant les variables, et conduit à l'expression

$$(1 + a^2) \ln(x(t)) + \frac{x(t)^2}{2} - 2 a x(t) + M \frac{t^2}{2} = (1 + a^2) \ln(x_0) + \frac{x_0^2}{2} - 2 a x_0 + M \frac{t_0^2}{2} .$$

Il est intéressant de remarquer que les valeurs de $x(t)$ restent toujours positives, mais tendent vers zéro lorsque t augmente.

L'utilisation des caractéristiques pour le transport de la densité $q(x(t), t)$ est relativement lourde, et il est préférable d'introduire la quantité Q définie par

$$Q(x, t) = \int_0^x q(\xi, t) d\xi .$$

Cette quantité représente le nombre de consommateurs assurant un budget inférieur ou égal à x . On va établir que Q est solution d'une équation d'advection homogène,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ,$$

et sera donc constante le long des caractéristique. En effet, on obtient

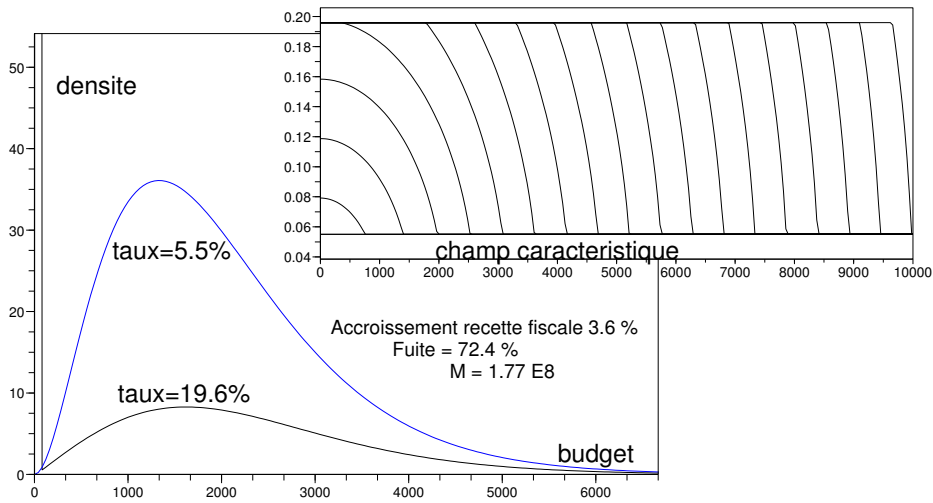
$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) = \int_0^x \frac{\partial q}{\partial t}(\xi, t) d\xi = - \int_0^x \frac{\partial(qu)}{\partial x} d\xi = -q(x, t)u(x, t) + q(0, t) u(0, t) ,$$

où

$$u(0, t) = 0 .$$

On obtient l'équation d'advection en remarquant que

$$q(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) .$$

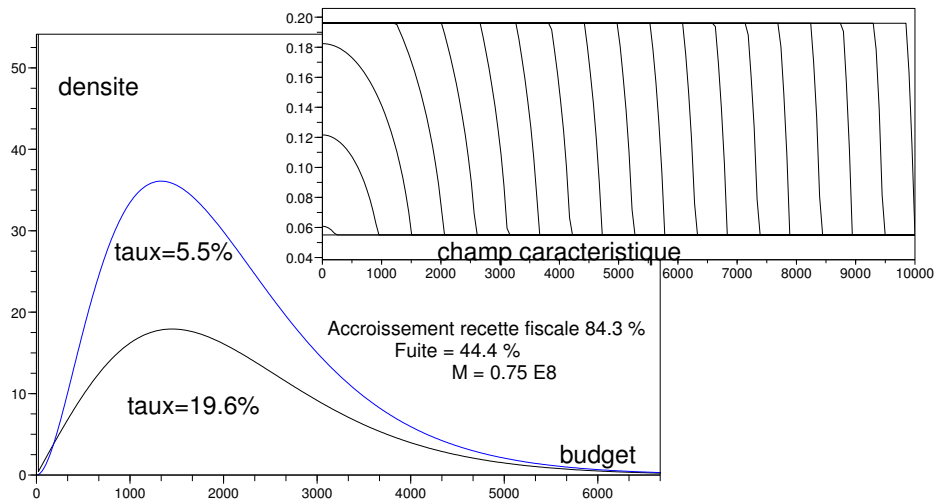


La figure précédente représente une simulation d'un passage de taux de T.V.A. de 5.5% à 19.6%. La constante de réactivité est relativement élevée :

$$M = 1.77 \cdot 10^8 .$$

L'ordre de grandeur de M est imposé par les valeurs de budget, qui vont de 0 Euros à 200 000 Euros. Le paramètre m est fixé à $m = 0.0015$, ce qui correspond à un maximum de densité réalisé pour le budget $x = 1333$, valant lui même 36 lorsque le taux de T.V.A. est égal à 5.5%. Lorsqu'on passe progressivement au taux de T.V.A. à 19.6%, on assiste à un glissement vers les budgets les plus

faibles, suivant l'échantillon du champ de caractéristiques représenté, et une accumulation d'"ex-consommateurs" sur un budget nul. La courbe de densité est en fait constituée de deux parties : l'une distribuée sur l'échelle des valeurs du budget, l'autre proche d'un profil d'impulsion (tronqué sur la figure) et qui représente l'accumulation due à la désertion de certains consommateurs. Ici, on assiste effectivement à une fuite de 72.4% des consommateurs, et la consommation ne rapporte plus qu'une recette fiscale comparable à celle du taux précédent précédent, tandis que, de son côté, la filière est très fortement touchée dans son activité. Cette simulation peut aussi fonctionner dans l'autre sens, pour appréhender les effets d'une baisse du taux de T.V.A. de 19.6 % à 5.5%. L'équation étant linéairement dégénérée, il n'y a pas de choc ou de discontinuité, et la résolution est réversible. Une telle opération peut permettre de recruter de nouveaux consommateurs, à condition de disposer d'un réservoir de candidats suffisant, représenté par le profil d'implulsion obtenu, près de $x = 0$, d'une part, et d'assurer le glissement vers de plus fortes consommations en assurant de la part de la filière une baisse des prix en conséquence. Dans le cas contraire, l'expression proposée pour la vitesse n'est plus valable.



La seconde figure représente une simulation pour une valeur de la constante de réactivité plus faible : $M = 0.75 \cdot 10^8$. On observe une recette fiscale plus importante, à 84.3% d'augmentation, et toujours une désertion des consommateurs évaluée à 44.4% de l'effectif initial, qui vient s'accumuler dans la première tranche (tronquée sur la figure). La distribution de la densité q_0 est restée la même. Il s'agit ici d'une simulation numérique, et non plus d'un calcul par les caractéristiques, comme précédemment. La similitude entre les deux figures illustre simplement que le calcul numérique

peut parfaitement concurrencer les calcul exact du point de vue de la qualité. Il exige toutefois une discrétisation assez fine de la grille de budget pour être suffisamment précis : ainsi, des tranches de l'ordre de 100 ? conduisent à des résultats bien moins précis pour la rentrée fiscale (erreur de 15%), et des tranches de 10 ? donnent les mêmes résultats que ceux obtenus par des tranches de 20 ?.

La discrétisation a donc été effectuée en découpant la grille de budget en 1000 tranches de $h = 20?$, numérotée de $j = 1$ à $j = 1000$. Les évaluations successives de T.V.A. correspondent à une suite de taux intermédiaires t_n , le premier correspondant à $t_0 = 0.055$ et le dernier à $t_s = 0.196$. On suppose que le paramètre $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ est constant pendant tout le calcul ; ainsi, $t_n = t_0 + n \Delta t$. On note q_j^n la densité dans la tranche n° j lorsque le taux de T.V.A. intermédiaire est t_n , et on pose

$$u_j^n = - \frac{M j h t_n}{1 + (j h)^2} .$$

Sachant $u_j^n \leq 0$, le schéma numérique explicite correspondant à la méthode des volumes finis, ou Schéma de Godunov, s'écrit

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{h} (q_{j+1}^n u_{j+1}^n - q_j^n u_j^n) .$$

La stabilité exige que la condition de Courant Friedrichs Lewy (CFL) suivante :

$$\frac{\Delta t}{h} \text{Max} (|u_j^n|) \leq 1$$

soit assurée. Ceci exhibe plus de 5000 niveaux intermédiaires de taux t_n , ce qui rend le calcul beaucoup trop coûteux en temps. On va rejeter ce schéma explicite, et lui préférer le schéma implicite suivant :

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{h} (q_{j+1}^{n+1} u_{j+1}^{n+1} - q_j^{n+1} u_j^{n+1}) ,$$

qui peut aussi s'écrire

$$q_j^{n+1} = \frac{q_j^n - \frac{\Delta t}{h} q_{j+1}^{n+1} u_{j+1}^{n+1}}{1 - \frac{\Delta t}{h} u_j^{n+1}} .$$

On observe, sachant $u_j^{n+1} \leq 0$, que la stabilité (du moins la positivité par exemple) est assurée sans aucune restriction sur le paramètre Δt . On a choisi d'effectuer environ 50 niveaux de taux intermédiaires, soit une division par 100 du temps de calcul. Le calcul à chaque niveau intermédiaire est en effet du même ordre de temps de calcul, à condition, dans le cas implicite, de pratiquer une boucle rétrograde (commencer par la dernière tranche, pour terminer par la première, en $j = 0$) . On pourrait encore réduire le temps de calcul, en augmentant Δt , mais ceci se ferait au détriment de la précision, et serait totalement inutile, la réponse étant instantannée avec les choix des paramètres de discrétisation proposés ici.

Remarque 3.1.1 Pour un autre choix de l'expression de la vitesse, par exemple

$$u = - \frac{M t}{1 + |x - a|} ,$$

on n'aurait pas le même comportement près de $x = 0$. En effet, dans ce cas les caractéristiques traversent cette valeur $x = 0$, pour se développer dans le secteur des $x < 0$, ce qui n'a plus aucun

sens (on pourrait interpréter des $x < 0$ comme un financement des consommateurs qui ont quitté le marché...). Par contre, le comportement pour les $x > 0$ reste similaire au choix de u proposé auparavant. De plus, l'équation d'advection pour Q n'aurait pas été homogène.

3.1.3 La fuite des contribuables

A de rares exception près, la population d'un état est toujours soumise à l'impôt sur le revenu, suivant un barème particulier, correspondant à plusieurs tranches. Ainsi, le barème français applicable aux revenus de l'année 2005 correspond aux taux suivants, en fonction du revenu x imposable, c'est à dire après déduction de toutes les réductions et de tous les avantages autorisés :

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 4334 , \\ 0.0683 & \text{si } 4334 < x \leq 8524 \\ 0.1914 & \text{si } 8524 < x \leq 15004 \\ 0.3738 & \text{si } 15004 < x \leq 29294 \\ 0.4262 & \text{si } 29294 < x \leq 39529 \\ 0.4809 & \text{si } x > 39529 \end{cases} .$$

Les valeurs de x sont exprimées en Euros. Dans d'autres états, il peut n'y avoir qu'un seul taux, applicable au delà d'un certain seuil : il s'agit de la "flat tax".

Un contribuable déclarant un revenu x se voit imposé de la somme

$$\sigma(x) = \int_0^x \tau(\xi) d\xi .$$

On introduit une fonction q représentant la densité des contribuables en fonction du revenu déclaré. Ainsi, à l'instant t , le nombre de contribuables déclarant un revenu situé entre les montants x et $x + \Delta x$ est proche de $q(x, t)\Delta x$. La recette fiscale globale est donnée par

$$R(\tau; t) = \int_0^\infty q(x, t) \sigma(x) dx .$$

Elle dépend du temps, et aussi du barème $\tau(x)$. L'échelle de temps est relativement large, portant sur plusieurs années, l'unité de temps étant l'année.

Bien entendu, les contribuables concernés par la plus haute tranche du barème, avec des revenus élevés, vont chercher à se soustraire à l'impôt, par exemple en allant s'installer dans un autre pays où les conditions sont plus favorables. Inversement, le retour à un barème plus avantageux pourra faire revenir certains de ces contribuables et même en intégrer d'autres en provenance de l'étranger. On se propose d'étudier le glissement de la population des contribuables, le long de l'échelle des revenus x au cours du temps, en fonction des différents paramètres déjà introduits, et de quelques autres permettant de réactualiser le bilan de cette population.

L'évolution du revenu d'un contribuable déclarant le montant x est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) ,$$

où $a(x, t)$ est un taux de variation qui tient compte de l'environnement économique. Il est positif lorsque cet environnement est en progression : augmentation des revenus, croissance boursière, etc... Il est négatif si cet environnement est en régression : perte de prime ou chômage, accession à la retraite, crise économique etc... Notons que le prélèvement fiscal, que l'on noterait $\sigma(x, t)$ à l'instant t n'intervient pas ici, puisque la somme correspondante reste imposable. On va considérer cette equation comme l'équation des caractéristiques, ce qui nous fait adopter la **vitesse caractéristique** $a(x, t)$. Pour tenir compte de nouveaux arrivants, on introduit un paramètre $\beta(x, t)$ représentant l'accroissement ou la baisse de la population de revenu x à l'instant t par un échange avec l'extérieur. Ce paramètre $\beta(x, t)$ est positif pour un apport (nouveaux contribuables par exemple) et négatif pour un départ (un décès par exemple). La fuite des contribuables est représentée par un coefficient $\mu(x, t; \tau)$ qui est positif ou nul. Le retour éventuel de contribuables expatriés est comptabilisé par l'intermédiaire du paramètre $\beta(x, t)$.

Comme il y a **conservation** de la masse des contribuables, on obtient l'**équation de bilan**,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a q) = \beta - \mu q .$$

Il s'agit d'une **équation de transport avec terme source**.

On s'intéresse maintenant à la discrétisation de cette équation. On introduit un pas de discrétisation Δx pour la variable de position, et un pas de discrétisation Δt pour le temps, puis les points de discrétisation $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ et comme dans les cas déjà traités on approche $q(x_j, t_n)$ par une quantité notée q_j^n . De façon analogue, on notera

$$a_j^n = a(x_j, t_n) , \quad \beta_j^n = \beta(x_j, t_n) , \quad \mu_j^n = \mu(x_j, t_n) ,$$

et ensuite

$$a_j^{n+} = \max(a_j^n, 0) \quad (\text{positif ou nul}) , \quad a_j^{n-} = \min(a_j^n, 0) \quad (\text{négatif ou nul}) .$$

Notons la propriété

$$|a_j^n| = a_j^{n+} - a_j^{n-} .$$

Le schéma de Godunov prend la forme naturelle suivante, en traitant de façon implicite le terme de fuite,

$$q_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta t \mu_j^n} \left(q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (|a_j^n| q_j^n - a_{j-1}^{n+} q_{j-1}^n + a_{j+1}^{n-} q_{j+1}^n) + \Delta t \beta_j^n \right) .$$

La condition CFL de stabilité est ici

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|a_j^n|) \leq 1 .$$

Compte tenu des unités, l'Euro pour x et l'année pour t , cette condition n'est absolument pas restrictive en pratique, les valeurs de a restant faibles. La discrétisation en espace peut surprendre dans la mesure où des croisements de densité peuvent intervenir sur une même interface, lorsque par exemple $a_l^n > 0$ et $a_{j+1}^n < 0$. Il peut effectivement y avoir des croisements de population, certains individus franchissant cette interface dans un sens pendant que d'autres la franchissent dans l'autre sens. Ceci n'est pas concevable s'il s'agit de matière, en dimension 1, et le même schéma n'est donc pas transposable, ou du moins pas interprétable, en mécanique des fluides où un tel croisement

ne peut pas avoir lieu, une telle situation se traduisant par une accumulation ponctuelle de masse provoquant immédiatement une montée en pression.

Deux cas tests ont été réalisés. Ils correspondent à deux populations de même taille : 36 millions d'individus, dont les profils de densité sont similaires en ce qui concerne les bas revenus et les classes moyennes, mais qui diffèrent en ce qui concerne les hauts revenus. Dans un cas la décroissance de la densité du profil est lente, en x^{-2} , et dans l'autre cas cette décroissance est rapide, de nature exponentielle. Plus précisément, le profil de la densité de population de contribuables est de la forme

$$q(x, t) = (q_0 + q_1 x + q_2 x^2) H(x - x_s) ,$$

où

$$q_0 = 1.5 \cdot 10^3 , \quad q_1 = 1.7 \cdot 10^{-5} , \quad q_2 = 2.5 \cdot 10^{-8} , \quad x_s = 2500 ,$$

et, pour la décroissance rapide,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-Kx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} , \quad \text{avec } K = 2.6214 \cdot 10^{-4} ,$$

puis pour la décroissance lente,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+A x^4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} , \quad \text{avec } A = 0.7475 \cdot 10^{-17} .$$

Les paramètres ont été calés pour obtenir une population similaire pour les bas et moyens revenus, et aussi pour conserver la même population totale.

La vitesse a choisie, est définie par

$$a(x) = \begin{cases} 10^{-6} (x - x_0) & \text{si } x \leq x_0 \\ 10^{-2} (x - x_0) & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} , \quad \text{avec } x_0 = 6000 .$$

Notons qu'elle est légèrement négative en dessous du seuil x_0 .

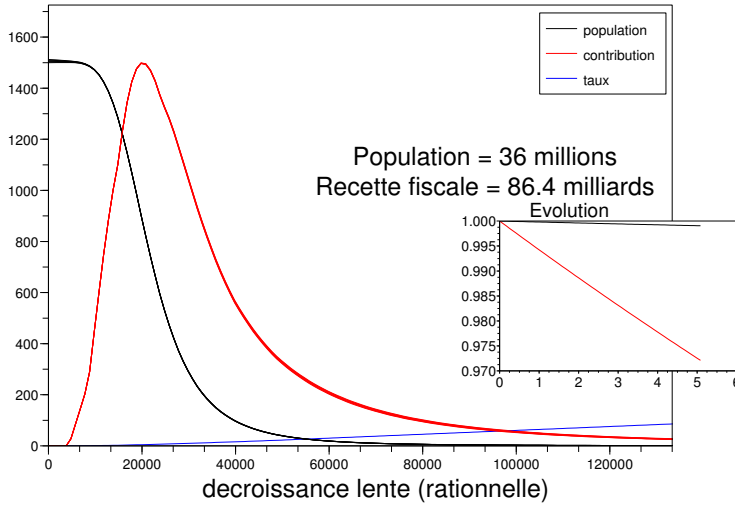
Le paramètre de variation de la population β a été choisi ainsi :

$$\beta(x) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_1 x^2} , \quad \beta_0 = 2.5 , \quad \beta_1 = 5 \cdot 10^{-8} .$$

Il reste très faible en ce qui concerne les hauts revenus. Enfin, le terme de fuite a été choisi de la forme suivante

$$\mu(x) = \left| \frac{\sigma(x)}{x} \right|^4 .$$

Le barème d'impôt est celui appliqué en France en 2006, pour les revenus de 2005, et la simulation a été réalisée sur 5 années dans les deux cas. Chaque figure représente le profil de la densité de population (en noir) et le profil de la densité de recette fiscale (en rouge) ramené à l'échelle de la population, pour permettre la lisibilité. Les résultats correspondent à chacune des 5 années de la simulation. Les variations sont difficilement perceptibles, car elles restent très limitées. Dans une fenêtre les évolutions de la population globale et de la recette fiscale sont représentées. Dans le



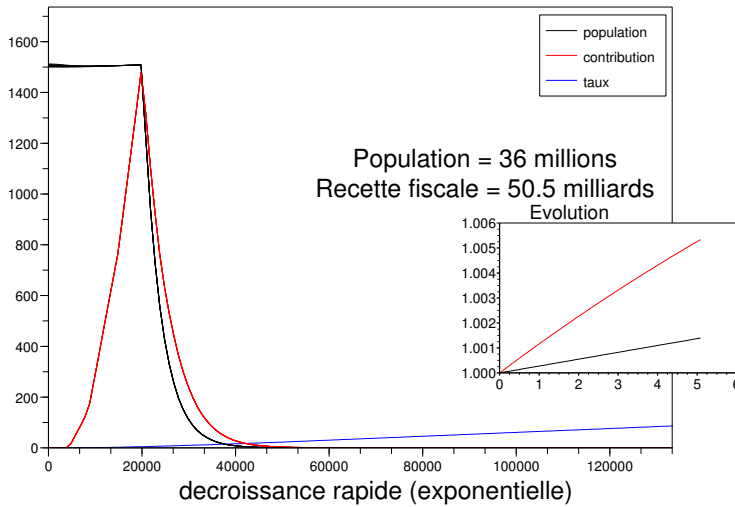
premier cas (profil de densité en décroissance lente) on observe une baisse de la recette fiscale de l'ordre de 3% sur ans et une très légère baisse de la population. Dans le second cas (profil de densité en décroissance exponentielle), on observe des tendances inverses : la recette fiscale augmente de plus de 0.5% sur 5 ans, avec une légère augmentation de la population.

Bien que réalistes, les choix des paramètres restent empiriques. Ils montrent cependant que le modèle est capable de déterminer une tendance à la hausse ou à la baisse, et donc que la modélisation permet à un décideur de prévoir les risques liés à ses choix de barème.

3.2 Les équations d'Hamilton-Jacobi

3.2.1 L'exemple de la combustion

Nous allons étudier l'exemple de feu de forêt, mais la combustion de tout autre objet pourrait se traiter de façon similaire, par exemple un bloc de propergol solide. La forêt est représentée sur une carte et un point y est représenté par ses coordonnées $(x, y) \in [0, L] \times [0, H]$, où L et H sont les dimensions de la carte. La variable d'évolution est ici le temps t . On se place dans un cas simplifié, en supposant que la ligne de feu, qui sépare la partie consumée de la partie "verte" (ou fraîche dans



le cas du propergol), peut se représenter par une équation explicite en y , de la forme

$$y = v(x, t) .$$

Ce cas simplifié se retrouve en général localement, éventuellement en effectuant une rotation de la carte. La ligne de feu est aussi appelée le **front de flamme**, ou encore **interface** en modélisation mathématique. Pour se fixer les idées, on suppose que la situation est telle que la partie verte se trouve au nord du front de flamme, et que la partie brûlée se trouve au sud (si la situation est inverse, il suffit de retourner la carte...)

On compare deux situations consécutives, à un instant t puis à un instant ultérieur $t + \Delta t$. Prenons un point $(x, v(x, t))$ du front de flamme, à l'instant t . Pendant la durée Δt il va provoquer la combustion de tout ce qui se trouve à sa portée, c'est à dire tous les points qui se trouvent à une distance inférieure à $c\Delta t$, en notant c la vitesse de combustion. Cette vitesse peut dépendre de l'hétérogénéité de la forêt ou du terrain, de l'absence ou non du vent, de l'action des pompiers, etc..., ce qui en fait en pratique une fonction de x et de t , qu'on notera $c(x, t)$. Il n'y a pas a priori de dépendance en v pour le cas du feu de forêt. Par mesure de simplicité, nous allons supposer que c est constant, et nous verrons par la suite comment généraliser au cas c variable.

On veut caractériser la nouvelle position du front de flamme, c'est à dire la courbe

$$y = v(x, t + \Delta t) .$$

Un point $(x, v(x, t + \Delta t))$ est caractérisé par le fait qu'il se trouve un point

$$(\xi(x), v(\xi(x), t))$$

situé exactement sur la précédente ligne de feu, à une distance exactement égale à $c \Delta t$, et que tous les autres points se trouvent à une distance supérieure ou égale à $c\Delta t$ (sinon, le point $(x, v(x, t + \Delta t))$ aurait déjà brûlé). Ceci se traduit par l'égalité :

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} (|x - \xi|^2 + |v(x, t + \Delta t) - v(\xi, t)|^2) = c^2 \Delta t^2 .$$

On en déduit l'inégalité suivante , pour laquelle il y a **égalité en au moins un point**,

$$|x - \xi|^2 + |v(x, t + \Delta t) - v(\xi, t)|^2 \geq c^2 \Delta t^2 ,$$

d'où

$$v(x, t + \Delta t) \geq v(\xi, t) \pm \sqrt{c^2 \Delta t^2 - |x - \xi|^2} ,$$

et le choix du signe "+" s'impose, puisque la situation choisie est telle que la partie verte soit au nord de la carte. Cette dernière égalité est encore réalisée à l'égalité pour au moins un point, c'est à dire que $v(x, t + \Delta t)$ s'identifie au maximum :

$$v(x, t + \Delta t) = \sup_{\{\xi \mid |x - \xi| \leq c\Delta t\}} \left(v(\xi, t) + \sqrt{c^2 \Delta t^2 - |x - \xi|^2} \right) .$$

On introduit maintenant la variable

$$\eta = \frac{\xi - x}{\Delta t} ,$$

qui permet d'écrire

$$\xi = x + \eta \Delta t$$

et ensuite

$$v(x, t + \Delta t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v(x + \eta \Delta t, t) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

On utilise maintenant les deux développements limités suivants, ce qui revient à faire une certaine **hypothèse de régularité suffisante** sur la fonction v ,

$$v(x + \eta \Delta t, t) = v(x, t) + \eta \Delta t \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \eta \Delta t \omega_1(\Delta t) ,$$

et

$$v(x, t + \Delta t) = v(x, t) + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \Delta t \omega_2(\Delta t) ,$$

où $\omega_1(\Delta t)$ et $\omega_2(\Delta t)$ sont des modules de continuité (ils tendent vers zéro lorsque Δt tend vers zéro). On obtient

$$v(x, t) + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \Delta t \omega_2(\Delta t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v(x, t) + \eta \Delta t \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \eta \Delta t \omega_1(\Delta t) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

et après des simplifications immédiates, tenant compte des propriétés du symbole \sup , à savoir

$$\forall A \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, \sup(A + \alpha Z) = A + \alpha \sup(Z) ,$$

pour toute expression Z , la relation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \omega_2(\Delta t) = \sup_{-c < \eta < c} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \eta \omega_1(\Delta t) + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

On fait tendre Δt vers zéro, pour obtenir, compte tenu de l'hypothèse de régularité sur la fonction v ,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

On va maintenant se débarrasser de la notation " \sup ", qui est encombrante dans les calculs. Pour cela, on introduit une fonction $p \rightarrow f(p)$ définie par

$$f(p) = - \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(\eta p + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

qu'on peut expliciter. En effet, le maximum est atteint soit à une des extrémités de l'intervalle $[-c, c]$, soit en un point où la dérivée s'annule, c'est à dire

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta p + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) = p - \frac{\eta}{\sqrt{c^2 - \eta^2}} = 0 .$$

On exprime η en fonction de p , en remarquant déjà qu'ils sont de même signe. Il vient, en élevant au carré,

$$p^2 (c^2 - \eta^2) = \eta^2 ,$$

d'où

$$c^2 p^2 = \eta^2 (1 + p^2) ,$$

et, en se rappelant que η et p sont de même signe,

$$\eta = \frac{c p}{\sqrt{1 + p^2}} .$$

On reporte cette valeur dans $f(p)$ pour obtenir

$$f(p) = - \left(\frac{c p^2}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{c p}{p \sqrt{1 + p^2}} \right) = - c \frac{1 + p^2}{\sqrt{1 + p^2}} = - c \sqrt{1 + p^2} .$$

Notons que les valeurs réalisées aux extrémités de l'intervalle sont cp , toujours inférieures à $c \sqrt{1 + p^2}$, donc exclues, ne réalisant pas de maximum.

Ainsi, l'évolution du front de flamme est régit par l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 , \quad \text{avec } f(p) = -c \sqrt{1 + p^2} .$$

Notons que cette équation est non linéaire en $\frac{\partial v}{\partial x}$. De telles équations sont appelées **équations d'Hamilton Jacobi**. On peut toujours se ramener à une équation d'onde, en posant

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} ,$$

et en dérivant l'équation. On obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial t} + f(u) = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0 .$$

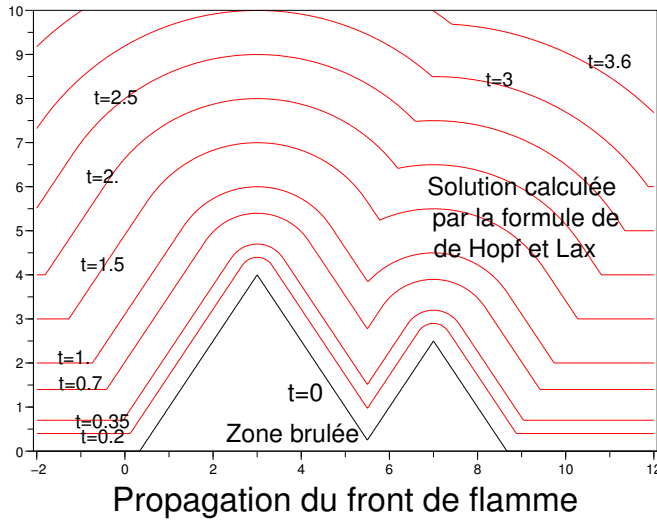
La vitesse caractéristique est donnée par

$$\lambda(u) = - \frac{c u}{\sqrt{1 + u^2}} .$$

Notons que la fonction f est concave, autorisant des chocs croissants sur la fonction u . Or les chocs sur u correspondent à des angles du graphe de v , le front de flamme, et donc seuls les angles rentrants de ce graphe seront maintenus et les angles saillants sont régularisés.

Lorsque la vitesse c n'est plus une constante, mais une fonction de x et de t , il suffit de remplacer c par $c(x, t)$ au niveau de la formulation d'Hamilton-Jacobi. L'équation d'onde fait apparaître la même expression de $\lambda(u)$ ainsi qu'un terme source :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c(x, t) \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1 + u^2} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 .$$



La figure précédente représente plusieurs position du front de flamme, à partir d'une position initiale en ligne brisée, avec une vitesse de combustion constante : $c = 2$. On observe que les angles

rentrants restent des angles, tandis que les angles saillants disparaissent et sont remplacés par les arcs de cercle dont le centre est le sommet de l'angle et le rayon est égal à $c\Delta t$. On a utilisé une vitesse de combustion $c = 2$ constante, pour les unités de longueur de la carte. La construction de la courbe correspondant à l'instant t a été réalisée en reprenant la formule

$$v(x, t + \Delta t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v(x + \eta \Delta t, t) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

avec $t = 0$. En notant $v_0(x)$ la position initiale du front de flamme, on obtient sa position à l'instant Δt en réalisant

$$v(x, \Delta t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v_0(x + \eta \Delta t) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

ou, en remplaçant la notation Δt par la notation t , plus simplement,

$$v(x, t) = \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v_0(x + \eta t) + t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

On procède à la discrétisation de la variable d'espace x en se donnant un pas d'espace Δx et un point de référence x_0 , puis en posant $x_j = x_0 + j \Delta x$, pour tout entier j . On note v_j l'approximation obtenue en réduisant le calcul du maximum aux seuls points de la discrétisation. Ainsi la paramètre η prend une forme discrète, telle que

$$\eta t \simeq (j - k) \Delta x ,$$

et la valeur v_j réalise

$$v_j = \sup_{|k-j| \leq \frac{c \cdot t}{\Delta x}} \left(v_0(x_{j+k}) + t \sqrt{c^2 - (k - j)^2 \frac{\Delta x^2}{t^2}} \right) .$$

Cette formule a été utilisée pour différentes valeurs de t . On peut aussi l'écrire plus simplement

$$v_j = \sup_{|k-j| \leq \frac{c \cdot t}{\Delta x}} \left(v_0(x_{j+k}) + \sqrt{c^2 t^2 - (k - j)^2 \Delta x^2} \right) .$$

Cette formule correspond à la **formule de Hopf et Lax**, dans le cas particulier de l'exemple étudié, et qui sera étudié dans un cadre général dans la prochaine section. On constate que les solutions ne sont pas calculées de proche en proche, mais chacune est directement calculée à par tir de la donnée initiale. Il faut cependant faire remarquer que la qualité du résultat exige un nombre de points conséquent. Ici, 600 points ont été utilisés. De plus le calcul est d'autant plus grand que le temps t est grand, puisque le nombre de termes à prendre en compte dans le calcul du maximum augmente considérablement. Dans le résultat précédent, où le figure est isométrique, on note que les arcs de cercle sont bien représentés, même pour les plus grandes valeurs de t . On peut éventuellement améliorer un défaut de profil en augmentant le nombre de points de discrétisation, mais, en contre partie, le calcul devient vite prohibitif.

Une autre possibilité consiste à calculer les positions de proche en proche, en limitant à $2K + 1 = 3, 5, 7, \dots$ le nombre de points voisins testés lors du calcul du maximum. Lorsque ce nombre est limité

à 3, on retrouve exactement le schéma de Gudunov. Il faut alors limiter le pas de temps Δt de telle façon que

$$c \Delta t \leq \Delta x$$

c'est à dire la condition CFL de Courant-Friedrichs-Lewy. Si le nombre est porté à $2K + 1$, la condition est moins restrictive et s'écrit

$$c \Delta t \leq K \Delta x .$$

3.2.2 La formule de Hopf et Lax

La transformation de Fenchel

Dans l'exemple précédent, sur la combustion, on a introduit la fonction $f(p)$ par la réalisation d'un maximum particulier,

$$f(p) = - \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(\eta p + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

qui peut aussi s'écrire

$$f(p) = - \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (p\eta - g(\eta)) ,$$

en posant

$$g(\eta) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\eta| > c \\ -\sqrt{c^2 - \eta^2} & \text{si } |\eta| \leq c \end{cases} .$$

La fonction g est une fonction convexe, généralisée dans la mesure où elle est prise infinie en dehors de l'intervalle $[-c, c]$. Son graphe est constitué d'un demi cercle centré à l'origine et situé sous l'axe horizontal. L'évaluation de f nous a fait calculer la transformée de Fenchel de g (au signe près ici, la transformée est effectivement $-f$).

Définition 3.2.1 Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sa **transformée de Fenchel** est définie, pour tout $p \in \mathbb{R}$, par

$$f^*(p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} (pv - f(v)) .$$

Remarque 3.2.2 On l'appelle aussi **polaire conluguée**.

On vient de voir que la transformée de

$$g(v) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |v| > c \\ -\sqrt{c^2 - v^2} & \text{si } |v| \leq c \end{cases}$$

correspond à

$$g^*(p) = \sqrt{1 + p^2} .$$

Dans le cas linéaire, avec

$$f(v) = a v ,$$

on obtient

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = a , \\ +\infty & \text{si } p \neq a . \end{cases}$$

Un autre exemple intéressant consiste à calculer la transformée de fenchel de la fonction $f(v) = \frac{|v|^\alpha}{\alpha}$, avec $\alpha > 1$. On obtient

$$f^*(p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \left(pv - \frac{|v|^\alpha}{\alpha} \right)$$

et en dérivant, on trouve que le maximum est réalisé lorsque

$$p = |v|^{\alpha-1} \text{ signe}(v) ,$$

, d'où

$$v = |p|^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ signe}(p)$$

et donc

$$pv - \frac{|v|^\alpha}{\alpha} = |p|^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{|p|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} |p|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{|p|^\beta}{\beta}$$

avec

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} ,$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 .$$

On retrouve la notion de dualité classique.

Proposition 3.2.3 *La transformée de Fenchel d'une fonction est **convexe**.*

La démonstration est immédiate, sachant que le "Sup" de fonctions convexes est convexe. Il suffit de constater que la fonction $p \longrightarrow pv - g(v)$ est affine, donc convexe et qu'on prend le Sup de cette famille de fonctions convexes, paramétrées par v .

Proposition 3.2.4 *Si la fonction f est continuellement dérivable, alors*

$$f^*(p) = v(p) f'(v(p)) - f(v(p)) ,$$

où la fonction $v(p)$ est telle que $f'(v(p)) = p$.

La démonstration est immédiate en écrivant que le "Sup" est réalisé lorsque la dérivée s'annule.

Proposition 3.2.5 *Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et f^* sa transformée de Fenchel. Alors on a l'inégalité de Fenchel*

$$\forall p \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R} \quad pv \leq f(v) + f^*(p) .$$

Il suffit d'écrire pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$pv - f(v) \leq \sup_{v \in \mathbb{R}} (pv - f(v)) = f^*(p) .$$

Définition 3.2.6 La transformée de Fenchel de f^* est naturellement définie par

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad f^{**}(v) = \sup_{p \in \mathbb{R}} (vp - f^*(p)) .$$

Proposition 3.2.7 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Alors

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad f^{**}(v) \leq f(v) .$$

On le démontre en prenant l'inégalité de Fenchel,

$$pv - f^*(p) \leq f(v) ,$$

et en prenant le "Sup" en p , qui est le plus petit des majorants.

Définition 3.2.8 Une fonction f est semi concinue inférieurement (ou **s.c.i.**) lorsque, en tout point x_0 ,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \geq f(x_0) .$$

Proposition 3.2.9 La transformée de Fenchel est toujours s.c.i..

Il suffit de remarquer que le "Sup" de fonctions s.c.i. est une fonction s.c.i.

Théorème 3.2.10 Soit f une fonction convexe, s.c.i. et finie en au moins un point. Alors

$$f^{**} = f .$$

Démonstration : Soit $u \in \mathbb{R}$ et $a < f(u)$. L'épigraphe de f , c'est à dire l'ensemble

$$A = \{ (u, w) \mid w \geq f(u) \} ,$$

est un convexe fermé du plan. Le point (u, a) est extérieur à A , et donc il existe une droite séparant le point (u, a) et l'ensemble fermé A , ce qui se traduit par

$$\exists p \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad p(v - u) + a \leq f(v) .$$

On a donc, toujours pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$pv - f(v) \leq pu - a .$$

On prend le "*Sup*" en $v \in \mathbb{R}$ pour obtenir

$$f^*(p) \leq pu - a ,$$

qu'on réécrit sous la forme

$$a \leq pu - f^*(p) \quad (\leq f^{**}(p)) .$$

Ainsi, pour tout $a < f(u)$, on a $a < f^{**}(u)$ et donc en particulier

$$f(u) \leq f^{**}(u) .$$

On avait l'inégalité dans l'autre sens d'après une proposition précédente, d'où l'égalité.

La formule de Hopf et Lax

On considère l'équation d'onde homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 ,$$

où la fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ est supposée **convexe** et telle que

$$f(0) = 0 ,$$

et la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = u_0(x) ,$$

où la fonction u_0 est suffisamment régulière et à support compact, cette dernière hypothèse étant purement simplificatrice et susceptible de généralisation. D'après la théorie des caractéristiques, on sait que celles-ci sont des droites, de pente bornée par

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f'(u_0(x))|)$$

. Si le support de u_0 est inclus dans l'intervalle $[a, b]$, alors le support de $u(., t)$ est inclus dans l'intervalle $[a - M_0 t, b + M_0 t]$, et la propriété de support compact est donc conservée. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$,

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(\xi, t) d\xi \quad , \quad v_0(x) = \int_{-\infty}^x u_0(\xi) d\xi .$$

Alors, en intégrant l'équation de $-\infty$ à x , il vient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = f\left(\frac{\partial v}{\partial x}(-\infty, t)\right) = f(0) = 0 .$$

Ainsi, la fonction v vérifie l'équation de **Hamilton-Jacobi**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 ,$$

et la condition initiale

$$v(x, 0) = v_0(x) .$$

Notre but est de montrer que parmi les solutions v il s'en trouve une caractérisée par la **formule de Hopf et Lax**,

$$v(x, t) = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \left(v_0(x_0) + t f^*\left(\frac{x - x_0}{t}\right) \right) .$$

Cette solution satisfait à la condition d'entropie, et on considérera par la suite qu'il s'agit de la seule physiquement acceptable.

Soit v une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, et p un paramètre réel que l'on introduit en posant

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - p \right)$$

dans l'évaluation de $f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ par le développement de Taylor suivant :

$$f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = f(p) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - p\right) f'(p) + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - p\right)^2}{2} f''(q) ,$$

avec q situé entre p et $\frac{\partial v}{\partial x}$. On ajoute maintenant $\frac{\partial v}{\partial t}$, pour obtenir

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f'(p) \frac{\partial v}{\partial x} - (pf'(p) - f(p)) + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - p\right)^2}{2} f''(q) = \frac{\partial v}{\partial t} + f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 .$$

On en déduit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f'(p) \frac{\partial v}{\partial x} = pf'(p) - f(p) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - p\right)^2 f''(q) .$$

La fonction f étant convexe, on sait que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - p\right)^2 f''(q) \geq 0 .$$

Ainsi v vérifie l'inégalité suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f'(p) \frac{\partial v}{\partial x} \leq pf'(p) - f(p) .$$

On recherche une **solution maximale** qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f'(p) \frac{\partial v}{\partial x} = pf'(p) - f(p)$$

et la condition initiale

$$v(x, 0) = v_0(x) .$$

On peut l'obtenir par les caractéristiques.

On se fixe un point (x_*, t_*) et on considère une caractéristique passant par (x_*, t_*) . Cette caractéristique provient d'un point $(x_0, 0)$ à l'instant initial. On note $x = x(t)$ son équation, et $v(t) = v(x(t), t)$ la valeur de la solution le long de cette caractéristique. On a les équations et conditions suivantes :

$$x'(t) = f'(p) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad x(t_*) = x_*$$

et

$$v'(t) = p f'(p) - f(p) .$$

Comme f' est une fonction monotone croissante, on introduit sa fonction inverse g également monotone croissante, telle que

$$g(f'(p)) = p .$$

On a en particulier

$$g(x'(t)) = p .$$

En intégrant l'équation en v , de $t = 0$ à $t = t_*$, il vient

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + \int_0^{t_*} [p f'(p) - f(p)] dt ,$$

ou encore puisque $p = g(x'(t))$,

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + \int_0^{t_*} [x'(t) g(x'(t)) - f(g(x'(t)))] dt .$$

On va chercher une trajectoire minimale, en minimisant $v(x_*, t_*)$ sur l'ensemble des trajectoires admissibles, qui sont les caractéristiques possibles allant de $(x_0, 0)$ à (x_*, t_*) . On note $x_m(t)$ cette trajectoire minimale, les autres trajectoires étant de la forme

$$x(t) = x_m(t) + \lambda r(t) ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $r(t)$ vérifiant

$$r(0) = r(t_*) = 0 .$$

On obtient, avec cette notation,

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + \int_0^{t_*} [g(x'_m(t) + \lambda r'(t)) (x'_m(t) + \lambda r'(t)) - f(g(x'_m(t) + \lambda r'(t)))] dt .$$

Cette expression est minimale en $\lambda = 0$. On traduit cela en dérivant puis en écrivant que cette dérivée est nulle pour $\lambda = 0$. ceci conduit à l'équation

$$\int_0^{t_*} [r'(t) g'(x'_m(t)) x'_m(t) + g(x'_m(t)) r'(t) - f'(g(x'_m(t))) g'(x'_m(t)) r'(t)] dt = 0 ,$$

où on peut apporter quelques simplifications, sachant que

$$f'(g(x'_m(t))) = x'_m(t)$$

(en effet, en appliquant f' à $g(f'(p)) = p$, il vient $f'(g(f'(p))) = f'(p)$, et $f'(g(q)) = q$, en posant $q = f'(p)$), et obtenir simplement

$$\int_0^{t_*} g(x'_m(t)) r'(t) dt .$$

Ceci est vrai pour toute fonction $r(t)$ telle que $r(0) = r(t_*) = 0$. On intègre par parties, pour obtenir

$$[g(x'_m(t)) r(t)]_{t=0}^{t=t_*} - \int_0^{t_*} r(t) \frac{d}{dt} (g(x'_m(t))) dt = 0 .$$

Il reste, pour toute fonction $r(t)$,

$$\int_0^{t_*} r(t) \frac{d}{dt} (g(x'_m(t))) dt = 0 .$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} (g(x'_m(t))) = 0 ,$$

ou encore

$$g(x'_m(t)) = A , \text{ constante} .$$

En appliquant f' , il vient

$$x'_m(t) = f'(A) ,$$

qui est aussi une constante, et donc

$$x_m(t) = t f'(A) + B ,$$

avec B constant. En identifiant, on obtient

$$B = x_0$$

puis

$$f'(A) = \frac{x_m(t) - x_0}{t} ,$$

et en particulier,

$$f'(A) = \frac{x_* - x_0}{t_*} .$$

On dispose maintenant de l'expression de la solution minimale :

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + \int_0^{t_*} [g(x'_m(t)) x'_m(t) - f(g(x'_m(t)))] dt ,$$

et en utilisant les constantes obtenues lors du calcul,

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + \int_0^{t_*} [g(f'(A)) f'(A) - f(g(f'(A)))] dt ,$$

ou plus simplement, en utilisant $g(f'(A) = A)$,

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + t [A f'(A) - f(A)] .$$

D'après l'étude de la transformée de Fenchel (Proposition 3.2.4), on a

$$A f'(A) - f(A) = f^*(f'(A)) ,$$

avec $p = f'(A)$ et $v(p) = A$ pour ce qui concerne les notations de cette proposition. On a finalement obtenu

$$v(x_*, t_*) = v_0(x_0) + t f^*(f'(A)) = v_0(x_0) + t f^*\left(\frac{x_* - x_0}{t_*}\right) .$$

On peut maintenant abandonner les indices "*, pour obtenir

$$v(x, t) = v_0(x_0) + t f^*\left(\frac{x - x_0}{t}\right) .$$

Il reste à prendre le minimum relativement à x_0 pour établir la **formule de Hopf et Lax**,

$$v(x, t) = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \left(v_0(x_0) + t f^*\left(\frac{x - x_0}{t}\right) \right) .$$

L'exploitation de la formule : semi-groupes et schéma de Godunov

Au lieu de procéder entre les instants $t = 0$ et $t = t_*$, on aurait pu le faire entre les instants t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$. La formule de Hopf correspondante est alors

$$v(x, t + \Delta t) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(v(y, t) + \Delta t f^*\left(\frac{x - y}{\Delta t}\right) \right) .$$

Cette formule est à rapprocher de l'expression d'un opérateur de semi-groupe :

$$v(., t + \Delta t) = S(\Delta t) v(., t)$$

où $S(\Delta t)$ représente l'**opérateur de semi-groupe**, de paramètre $\Delta t \geq 0$. Cet opérateur satisfait aux propriétés suivantes :

$$S(t) \circ S(s) = S(s + t) = S(t + s) = S(s) \circ S(t) , \quad S(0) = I_d \text{ (Identité)},$$

ce qui signifie qu'avancer d'abord d'une durée t puis d'une durée s donne le même résultat que si on avance d'abord d'une durée s et ensuite d'une durée t . Le résultat d'unicité s'articule sur le fait que l'opérateur de semi groupe est ici une **contraction** dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, s + t) - w(x, s + t)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, s) - w(x, s)| dx ,$$

si v et w sont deux solutions de l'équation. L'unicité s'en déduit trivialement en faisant tendre s vers zéro :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, t) - w(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, 0) - w(x, 0)| dx ,$$

qui est nul lorsque v et w satisfont à la même condition initiale. L'opérateur inverse de $S(t)$ serait logiquement $S(-t)$, qui n'est pas toujours défini dans le cas non linéaire, à cause de la possibilité d'occurrence d'un choc, ce qui explique qu'on ne puisse pas parler de groupe.

Un schéma numérique est la version discrète de la notion d'opérateur de semi groupe : il permet d'avancer de la durée Δt à partir de la solution approchée à l'instant $t_n = n\Delta t$ pour construire la solution approchée à l'instant $t_n + \Delta t = t_{n+1}$ suivant une expression de la forme

$$v_h(., t_{n+1}) = S_h(\Delta t) v_h(., t_n)$$

où l'indice " h " rappelle le caractère discretisé.

En reprenant les notations de discrétisation du chapitre 2 (section 2.6.1), on représente la solution approchée à l'instant t_n par une fonction continue, affine sur chaque maille $[x_j, x_{j+1}]$. En notant v_j^n sa valeur en x_j , cette fonction est donnée par

$$v_h(x, t_n) = v_j^n \left(\frac{x_{j+1} - x}{\Delta x} \right) + v_{j+1}^n \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \quad \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1} .$$

Pour reconstruire la solution approchée à l'instant t_{n+1} , il suffit de calculer les v_j^{n+1} . En utilisant la formule de Hopf et Lax, il vient

$$v_j^{n+1} = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(v_h(y, t_n) + \Delta t f^*\left(\frac{x_j - y}{\Delta t}\right) \right) .$$

On pose

$$v_h(y, t_n) = v_j^n - \frac{v_j^n - v_h(y, t_n)}{\Delta t} \Delta t ,$$

pour obtenir (en utilisant aussi " $\inf(-A) = -\sup(A)$ " pour toute expression A)

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{v_j^n - v_h(y, t_n)}{\Delta t} - f^*\left(\frac{x - y}{\Delta t}\right) \right) .$$

On pose maintenant

$$p = \frac{x - y}{\Delta t} ,$$

c'est à dire

$$y = x - p \Delta t .$$

On obtient

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{v_j^n - v_h(x - p\Delta t, t_n)}{\Delta t} - f^*(p) \right) .$$

Nous allons maintenant supposer que le maximum est réalisé pour $p \in [-1, 1]$, c'est à dire pour des valeurs de $v_h(y, t_n)$ réalisées dans une des deux mailles adjacentes à x_j . Ceci correspond à une restriction sur Δt qui traduit effectivement la condition C.F.L. (Courant-Friedrichs-Lewy). Supposons dans un premier cas que le \sup soit réalisé pour $p > 0$. Dans ce cas,

$$(\text{cas } p > 0) \quad \frac{v_j^n - v_h(x_j - p\Delta t, t_n)}{\Delta t} = - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} p ,$$

et

$$Sup_p \left(-\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} p - f^*(p) \right) = f^{**} \left(-\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \right) = f \left(-\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \right) ,$$

puisque f est convexe. Si au contraire le Sup est réalisé pour $p < 0$, on aura

$$(cas \ p < 0) \quad \frac{v_j^n - v_h(x_j - p\Delta t, t_n)}{\Delta t} = -\frac{v_j^n - v_{j+1}^n}{\Delta x} p = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} p ,$$

et

$$Sup_p \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} p - f^*(p) \right) = f^{**} \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) = f \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) .$$

Enfin, il reste à mentionner le cas où le Sup est réalisé en $p = 0$, qui donne

$$Sup_p \left(\frac{v_j^n - v_h(x_j - p\Delta t, t_n)}{\Delta t} - f^*(p) \right) = -f^*(0) .$$

On obtient l'expression du schéma :

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t \ Max \left(f \left(-\frac{v_i^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \right) , f \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) , -f^*(0) \right) .$$

Il s'agit en fait du **schéma de Godunov pour l'équation d'Hamilton-Jacobi**. On retrouve le schéma de Godunov standard, pour l'équation en u , en posant

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x}$$

qui exige la condition C.F.L.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \ Sup_k |f'(k)| \leq 1 .$$

remarquons que ce schéma ne teste pas seulement les valeurs v_k^n mais aussi les valeurs interpolées entre les v_k^n , à la différence de la méthode utilisée dans la section précédente, sur les feux de forêt. De ce fait, elle est bien plus performante pour beaucoup moins de points de discrétisation, notamment dans les zones de régularisation.

Application aux feux de forêt

Dans la section précédente, en conservant les mêmes notations (le front de flamme est représenté par une fonction de x et de t , notée $v(x, t)$, on avait

$$v(x, t + \Delta t) = Sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v(x + \eta \Delta t, t) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) ,$$

et dans le contexte numérique, on a pour chaque point x_j ,

$$v_j^{n+1} = Sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(v_h(x_j + \eta \Delta t, t_n) + \Delta t \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

On pose

$$v_h(x_j + \eta \Delta t, t_n) = v_j^n + \frac{v_h(x_j + \eta \Delta t, t_n) - v_j^n}{\Delta t} \Delta t ,$$

pour obtenir

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t \sup_{-c \leq \eta \leq c} \left(\frac{v_h(x_j + \eta \Delta t, t_n) - v_j^n}{\Delta t} + \sqrt{c^2 - \eta^2} \right) .$$

La **condition de Courant-Friedrichs-Lewy** se traduit ici par

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c \leq 1 .$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2.11 *Si la condition (CFL) est assurée, le Sup est réalisé pour une valeur η telle que*

$$x_j - \Delta x < x_j + \eta \Delta t \leq x_j + \Delta x .$$

Il suffit de remarquer qu'en extrémité d'intervalle, on a $|\eta| = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et donc

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |\eta| = 1 ,$$

qui implique, en l'introduisant dans la condition

$$CFL$$

l'inégalité

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} |\eta| ,$$

ou plus simplement

$$c \leq |\eta|$$

et l'expression

$$\sqrt{c^2 - \eta^2}$$

est nulle ou n'est plus définie. L'expression à maximiser est de la forme

$$u \eta + \sqrt{c^2 - \eta^2} ,$$

avec

$$u = \begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n & \text{si } \eta > 0 \\ u_{j-\frac{1}{2}}^n & \text{si } \eta < 0 \end{cases}$$

et sa dérivée est de la forme

$$u - \frac{\eta}{\sqrt{c^2 - \eta^2}} .$$

On constate qu'elle tend vers $-\infty$ lorsque η est proche de c , ou vers $+\infty$ lorsque η est proche de $-c$. En aucun cas le maximum ne peut être atteint à l'une de ces extrémités.

On suppose que la condition *CFL* est satisfaite, et ainsi l'évaluation du *Sup* n'exige que trois tests : l'un concernant l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, l'autre l'intervalle $]x_{j-1}, x_j[$ et le dernier le point x_j . Pour l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, la dérivée de l'expression à maximiser est

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\eta}{\sqrt{c^2 - \eta^2}}$$

et ne peut être nulle que si

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n > 0$$

et alors le maximum est réalisé en

$$\eta = \frac{c u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\sqrt{1 + \left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right)^2}},$$

ce qui correspond à la valeur

$$c \sqrt{1 + \left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right)^2}.$$

De façon analogue, et à condition d'avoir

$$u_{j-\frac{1}{2}}^n < 0,$$

le maximum est réalisé pour $\eta < 0$ pour n

$$\eta = \frac{c u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\sqrt{1 + \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2}},$$

ce qui correspond à la valeur

$$c \sqrt{1 + \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2}.$$

Enfin, pour $\eta = 0$, l'expression à maximiser vaut exactement c . En posant

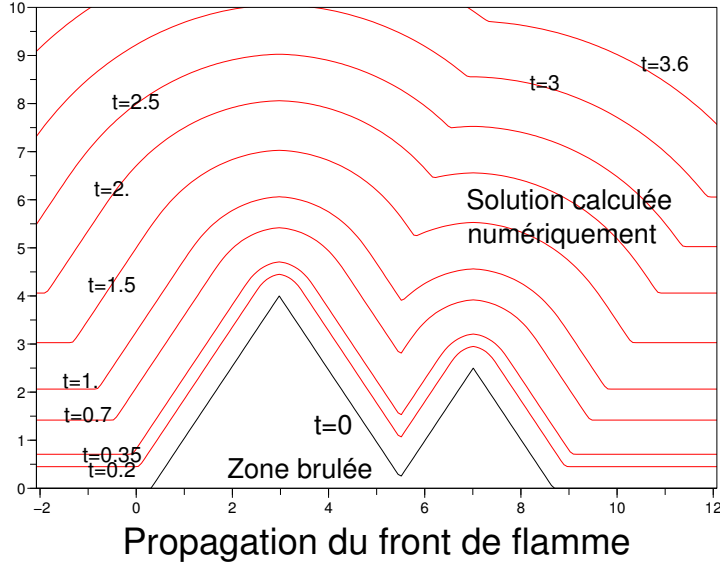
$$M_j^n = \text{Max} \left(u_{j+\frac{1}{2}}^n, -u_{j-\frac{1}{2}}^n, 0 \right),$$

le *Sup* vaut

$$c \sqrt{1 + \left(M_j^n\right)^2}.$$

L'expression du schéma de Godunov correspond à

$$v_j^{n+1} = v_j^n + c \sqrt{1 + \left(M_j^n\right)^2}.$$



Ce schéma a été programmé pour les mêmes valeurs initiales que dans le calcul précédent, avec $c = 2$ et une CFL de 0.99. On obtient des résultats similaires :

On constate simplement que, pour des résultats de qualité comparables, le calcul numérique, qui est incrémental, est bien plus rapide que le calcul effectuée en utilisant la formule de Hopf.

Lorsque la vitesse c est variable (mais bien entendu positive), il suffit de remplacer c par l'expression de la vitesse variable c_j^n dans l'expression du schéma, ce qui revient à la supposer constante sur chaque maille

$$\left] x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2} \right[.$$

On peut aussi en tenir compte dans le calcul de M_j^n ce qui donne une expression du schéma plus compliquée.

3.2.3 Les courbes isovaleurs (level sets)

Dans l'exemple étudié en section précédente, les fronts de flamme sont représentés par des courbes correspondant chacune au même instant d'inflammation. Elles sont donc caractérisées par une même

valeur du paramètre t , et s'agissant du temps, on les appelle **courbes isochrones** ou **courbes tautochrone**, ou plus simplement, dans le cas général, **courbes isovalues** ou **courbes de niveau**. La construction du modèle "isochrone" peut être réalisé en écrivant que lors d'une passade d'une courbe à la suivante, un point est "déplacé" proportionnellement à la normale à la courbe. Notons que ce point est plus souvent fictif que matériel. On obtient une équation vectorielle de la forme suivante, dans le plan,

$$\frac{dM}{dt} = c N ,$$

en notant M le point considéré, N la normale (unitaire) à la courbe et c le coefficient de proportionnalité, qui peut aussi s'interpréter comme une vitesse de déplacement. En supposant, pour simplifier, que la courbe admet une équation de la forme

$$y = v(x, t) ,$$

et en représentant la courbe sous forme paramétrée, en notant par exemple

$$x = x(s, t) , \quad y = y(s, t) = v(x(s, t), t) ,$$

il vient

$$\frac{dM}{dt} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x(s, t), t) + \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x(s, t), t) \end{array} \right) ,$$

et

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2}} \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \\ 1 \end{array} \right) .$$

On en conclue

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = - \frac{c \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2}} ,$$

et

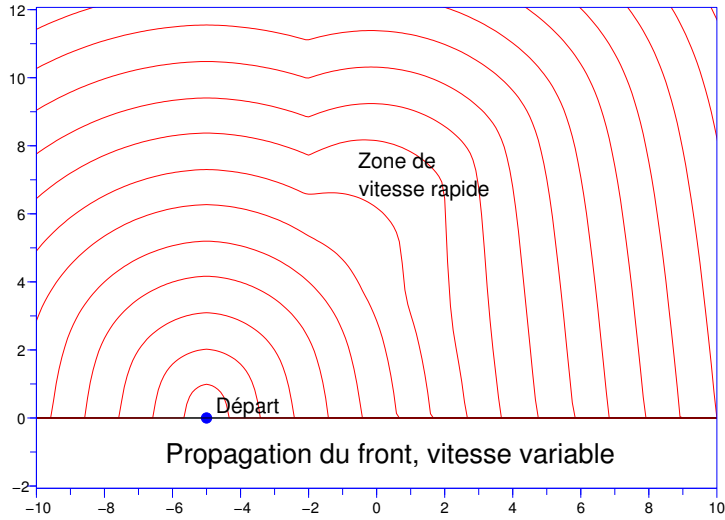
$$\frac{\partial v}{\partial t}(x(s, t), t) + \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x(s, t), t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2}} .$$

Il en résulte, sachant que x coïncide avec $x(s, t)$,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} + \frac{c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} .$$

On retrouve l'équation de Hamilton-Jacobi obtenue précédemment. Notons que le paramètre c peut très bien être variable dans la démarche précédente.

La figure précédente présente une succession de courbe isichrones toutes issues d'une même point de départ, pour une donnée de vitesse variable. I s'agit d'une accélération progressive à l'intérieur d'un disque centré au point $(x_0, y_0) = (0.4, 6)$, avec les unités de la figure. L'augmentation de la vitesse provoque l'écartement des courbes isochrones.



On considère maintenant un signal parti d'un point de départ D_0 fixé, et un point (x, y) du plan. On note

$$T(x, y)$$

le temps mis par le signal parti de D_0 à l'instant initial $t = 0$ pour atteindre le point (x, y) . Les courbes

$$T(x, y) = \text{Constante}$$

constituent des courbes isochrones. Ces courbes présentent quelquefois des profils topologiques qui peuvent être complexes : par exemple un signal électromagnétique sera beaucoup plus rapide dans un milieu conducteur que dans un milieu isolant. La vitesse peut également ne pas être la même dans toutes les directions, par exemple lorsque le milieu est anisotrope, ou plus simplement lorsque la direction de la vitesse est imposée, dans les rue d'une ville pour le trafic routier par exemple. Dans ce dernier cas, l'isochrone est constituée d'un ensemble fini de points.

Lorsque le milieu est **isotrope**, c'est à dire que ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions, une **courbe de niveau**, ou **level-set** est la donnée d'une courbe dont l'équation est de la forme

$$\Phi(x, y, t) = 0 ,$$

à chaque valeur du paramètre t , qui peut tout aussi bien représenter un instant dans le temps, que tout autre paramètre d'évolution, comme l'altitude en géographie terrestre ou la profondeur en géographie marine, la température pour des isothermes, la pression pour des isobares, etc...

On peut décider de paramétrer ces courbes, en utilisant le paramètre s qui peut être l'abscisse curviligne ou tout autre paramètre représentatif, et écrire

$$\forall s, \quad \Phi(x(s, t), y(s, t), t) = 0.$$

La dérivation par rapport à t donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

et la dérivation par rapport à s donne

$$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

ce qui exprime que la normale unitaire N à la courbe level-set est liée au gradient de Φ , par

$$N = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}, \quad \text{avec} \quad |\nabla \Phi| = \sqrt{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2}.$$

Si par ailleurs, la vitesse de déplacement d'une courbe à l'autre par rapport au paramètre t est un vecteur que l'on peut décomposer sur la base constituée de la normale N et de la tangente T à la courbe c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = -c N + d T,$$

en notant $-c$ et d les composantes, on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c (N, \nabla \Phi) - d (T, \nabla \Phi) = c \frac{(\nabla \Phi, \nabla \Phi)}{|\nabla \Phi|} = c |\nabla \Phi|,$$

puisque $\nabla \Phi$ est colinéaire à N , donc orthogonal à T , et en conséquence

$$(T, \nabla \Phi) = 0.$$

Il reste l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c |\nabla \Phi| = 0.$$

Le même raisonnement, avec des notations un peu plus complexes, se généralise en dimension trois d'espace, et permet de caractériser les surfaces de niveau ou plus simplement les "level-set" lorsque la vitesse de déplacement d'une surface à l'autre par rapport au paramètre t est colinéaire à N .

On retrouve une équation d'Hamilton Jacobi, à traiter numériquement comme dans l'exemple précédent, lorsque le profil de la courbe level-set se prête à une représentation de la forme

$$y = u(x, t).$$

Dans le cas général de la dimension deux d'espace, l'équation se présente sous la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) .$$

On pose

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Notons qu' a priori

$$w = 0$$

et qu'il est fondamental de conserver cette valeur nulle. En dérivant l'équation en x on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} H(u, v) ,$$

et en la dérivant en y on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} H(u, v) .$$

Par ailleurs, on calcule

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} H(u, v) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(u, v) = 0 .$$

La valeur nulle de w est bien préservée.

On se retrouve devant deux équations d'ondes, la première en u , pour v fixé, dans la direction x et la seconde en v , pour u fixé, dans la direction y . On peut intégrer chacune de ces équations par une méthode numérique adaptée aux équations d'ondes. Le choix des schémas de Lax-Friedrichs ou de Lax-Wendroff, ou mieux de leur composition dans le schéma composite de Wendroff. On obtient ainsi, en chaque point (x_j, y_k) avec $x_j = j\Delta x$, $y_k = k\Delta y$ par exemple, des valeurs u_{jk}^n et v_{jk}^n à chaque instant $t_n = n\Delta t$. Il reste à reconstituer Φ , ce qui peut être réalisé en intégrant l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H(u, v)$$

que l'on interprète comme une simple équation différentielle, et qui peut être approchée en utilisant une méthode explicite, par exemple la méthode d'Euler

$$\Phi_{jk}^{n+1} = \Phi_{jk}^n + \Delta t H(u_{jk}^n, v_{jk}^n) .$$

Cette technique a permis d'approcher les différentes valeurs de Φ à chaque instant t_n . Si on veut maintenant représenter visuellement une courbe

$$\Phi = \text{Constante} , \quad \text{pour } t = t_n \text{ fixé} ,$$

on peut se fixer un seuil

$$\epsilon > 0$$

et noircir toutes les mailles

$$\left[x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2} \right] \times \left[y_k - \frac{\Delta y}{2}, y_k + \frac{\Delta y}{2} \right] ,$$

telles que

$$\left| \Phi_{jk}^n - Constante \right| > \epsilon .$$

Les mailles restantes représentent une zone où passe la courbe level-set (approchée). La même idée peut être adaptée au traitement des surfaces de niveau (level-set) dans l'espace.

Nous verrons plus tard, au chapitre 9, comment améliorer le profil de la courbe level-set par une technique de réduction de la diffusion numérique. Il suffira de marquer par la valeur

$$M_{jk} = 1$$

les mailles pour lesquelles

$$\Phi_{jk}^n > Constante + \epsilon$$

et par la valeur

$$M_{jk} = -1$$

les mailles pour lesquelles

$$\Phi_{jk}^n < Constante - \epsilon .$$

On réalise ainsi une sorte de discontinuité de M , le long de la courbe level-set. Il restera à faire opérer une technique de raidissement de choc pour réduire la zone

$$\left| \Phi_{jk}^n - Constante \right| \leq \epsilon$$

en une zone dont l'épaisseur soit de l'ordre de la largeur de maille.

Notons qu'il n'est pas nécessaire d'imposer une petite valeur au paramètre ϵ . Il suffit de séparer la zone de travail du reste de la zone de calcul. Le redressement donnera la même qualité de résultat.

3.3 Les réactions transportées

Dans cette section, quelques exemples de propagation sont présentés, qui tous traduisent des modèles d'ondes particuliers.

3.3.1 Réactions chimiques et polluants

En chimie, les spécialistes utilisent la notion de **concentration** plutôt que la densité. Une concentration correspond à une partie d'un produit particulier P , présente dans un mélange de produits. Elle est nulle lorsque le produit P n'est en fait pas présent, et elle vaut sa valeur maximale 1 lorsque le produit P occupe toute la place disponible. On suppose que le mélange se déplace dans l'espace, ici l'axe réel, pour simplifier. On note $c(x, t)$ la concentration à la position x , à l'instant t . Le mélange se déplace avec une certaine vitesse $u(c, x, t)$ dépendante de la position x , de l'instant t et éventuellement de la concentration $c(x, t)$.

S'il n'y a pas de modification dans le mélange, la concentration reste constante, et comme entre les instants t et $t + \Delta t$, le mélange avance de la distance $\Delta x = u \Delta t$, on a

$$c(x + \Delta x, t + \Delta t) = c(x, t) .$$

On en déduit, par un développement limité, l'équation d'onde

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(c, x, t) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 .$$

Lorsqu'il y a **interaction** avec le milieu, le modèle la prend en compte par l'intermédiaire d'un terme source proportionnel à c , par exemple de la forme

$$c(x + \Delta x, t + \Delta t) = c(x, t) + \Delta t A(c(x, t), x, t) c(x, t) .$$

On en déduit l'équation d'onde non homogène

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(c, x, t) \frac{\partial c}{\partial x} + A(c, x, t) c = 0 .$$

Le coefficient $A(c, x, t)$ peut dépendre de la position x , de l'instant t et éventuellement de la concentration $c(x, t)$. Lorsqu'il est positif, il traduit une perte du produit considéré. C'est par exemple le cas lorsque le mélange avance dans un milieu chaud et que la température provoque une réaction qui consomme de la concentration c , et donc sa diminution au cours de l'avancement du mélange. Un autre exemple concerne la concentration en bactéries dans de l'eau sortant d'une station d'épuration et larguée en mer : la salinité va provoquer la destruction de ces bactéries, et ceci d'autant plus rapidement que l'eau de mer est agitée. Ainsi, actuellement, de nombreuses communes du littoral qui larguaient auparavant leurs eaux épurées en fond de baie ou d'estuaires prévoient des largages près d'une pointe ou plus au large, pour profiter de l'agitation du milieu marin et de sa plus grande salinité. Au contraire, une valeur négative du coefficient $A(c, x, t)$ traduit une augmentation de la concentration c dans le mélange. Par exemple, en exploitation de gisement de pétrole, on injecte dans le milieu (une roche poreuse) un mélange d'eau et de polymère, qui s'enrichit en huile présente dans la roche, et transporte le mélange "eau+polymère+huile" vers un puits d'extraction. Le polymère agit comme un détergent, pour mieux nettoyer la roche de son huile, comme on utilise un produit "vaisselle" pour dégraisser des plats. Dans ce cas le coefficient $A(c, x, t)$ doit absolument dépendre de c et devenir négatif ou nul lorsque la concentration maximale $c = 1$ est atteinte :

$$A(1, x, t) \leq 0 .$$

En effet, une valeur positive du coefficient A créerait des concentrations supérieures à 1.

L'équation précédente n'est pas conservative. On peut la rendre conservative en introduisant une densité q transportée par le même champ de vitesse u , et qui peut représenter par exemple la densité du mélange. On suppose qu'elle satisfait l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) = 0 .$$

Il s'agit d'une équation homogène, traduisant la conservation de la masse de mélange.

On peut maintenant établir une équation de transport de la densité du produit qc , à partir des deux équations précédentes. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(qc) + \frac{\partial}{\partial x}(qcu) + A(c, x, t) qc = 0 .$$

Il s'agit d'une **équation conservative**, mieux adaptée au traitement numérique. On peut considérer cette densité q comme une quantité réelle, c'est à dire ayant une signification réelle, ou comme une densité fictive, sans signification réelle. Dans ce dernier cas, on peut toujours la réactualiser au cours du calcul. Les deux options donnent des résultats assez proches.

On considère la situation suivante : un bouchon de polluant arrive par une conduite dans un bassin de décantation où il est réduit. Cette arrivée est simulée par une baisse subite de la vitesse u qui passe de la valeur $u = 1$ à la vitesse $u = 0.3$, à l'entrée du bassin. La vitesse u ne dépend pas de t . Le bouchon est représenté par un profil positif, à support compact et le paramètre de réaction est choisi de la forme

$$A = \frac{k c}{1 + c} , \text{ avec } k = 0.125$$

décroissant lorsque c décroît.

La figure jointe montre un résultat de simulation obtenu par le schéma de Godunov, en calculant la densité de mélange q et la densité du produit (qc) pour en déduire la concentration en calculant

$$c = \frac{(qc)}{q} .$$

On introduit un pas de discrétisation en espace Δx et un pas de discrétisation en temps Δt , on pose $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ et on note q_j^n , $(qc)_j^n$, c_j^n , u_j^n les approximations respectives de $q(x_j, t_n)$, $(qc)(x_j, t_n)$, $c(x_j, t_n)$, $u(x_j, t_n)$ puis $A_j^n = A(c_j^n, x_j, t_n)$. Le schéma correspondant à la version utilisant une densité réelle s'écrit en deux temps : le calcul de la densité du mélange (réelle) :

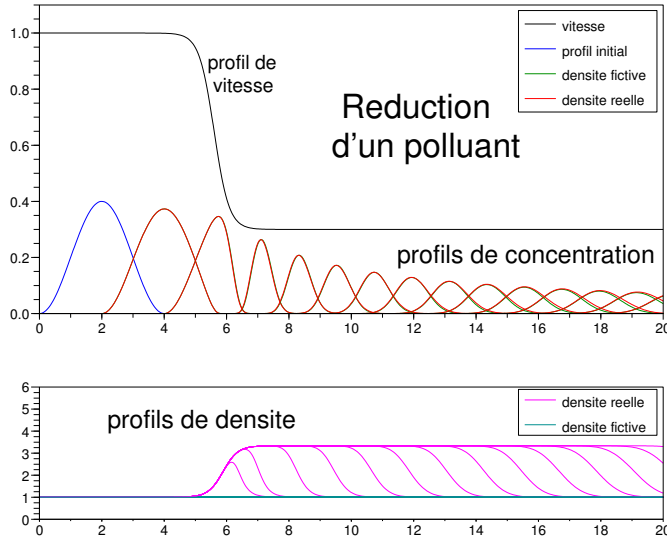
$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_j^n u_j^n - q_{j-1}^n u_{j-1}^n)$$

et la calcul de la densité du polluant

$$(qc)_j^{n+1} = \frac{(qc)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((qc)_j^n u_j^n - (qc)_{j-1}^n u_{j-1}^n)}{1 + \Delta t A_j^n} .$$

Le calcul de la concentration s'en déduit par

$$c_n^{n+1} = \frac{(qc)_j^{n+1}}{q_j^{n+1}} .$$



Le schéma correspondant à une densité fictive revient à poser systématiquement $q_j^n = 1$ dans le schéma précédent. On obtient

$$c_j^{n+1} = \frac{c_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_j^n u_j^n - c_{j-1}^n u_{j-1}^n)}{\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)\right) (1 + \Delta t A_j^n)} .$$

La différence entre les deux résultats obtenus après 120 pas de temps est à peine perceptible. Notons que sachant la vitesse positive, le schéma de Godunov se réduit ici au schéma décentré. La condition limite en $x = 0$ est restée

$$c(0, t) = 0 ,$$

ce qui revient à dire qu'aucun autre polluant n'est rentré. La discrétisation a utilisé 500 pas d'espace, ce qui correspond à une "CFL" à 0.998 dans la conduite, puis à 0.3 dans le bassin. On observe un raidissement du front du bouchon dans la zone de fort gradient de vitesse. Le schéma à densité fictive est aussi appelé **schéma de pondération par les taux de déformation**. Il est souvent utilisé par les ingénieurs pour traiter les équations d'ondes non conservatives. Il fonctionne tout aussi bien lorsque la vitesse u dépend de c , c'est à dire lorsque l'onde est vraiment non linéaire, et conserve la stabilité de la norme "Sup" dans le cas homogène.

3.3.2 Le vent, les pollens, la phéromone

La plupart des plantes et des insectes utilisent l'atmosphère et donc le vent, pour propager des substances nécessaires à leur reproduction. Pour les plantes, il s'agit essentiellement des pollens, qui

peuvent parcourir de longues distances et résister pendant de longues périodes, mais qui constituent également un risque allergique pour les populations humaines. Les insectes femelles adultes, chez les papillons, notamment, diffusent des molécules olfactives caractéristiques pour stimuler les mâles du voisinage, de la même espèce, et leur permettre de localiser leur présence et d'assurer la reproduction de l'espèce. Le risque est ici celui de la multiplication des ravageurs des cultures et toute entrave à cette communication va constituer un obstacle à la reproduction d'une espèce particulière bien ciblée. Il s'agit d'une alternative écologique à l'exploitation massive de pesticides qui ne distinguent pas entre les espèces, celles qui sont ciblées, et accumulent dans le sol des produits quelquefois indésirables. l'alternative, appelée **confusion sexuelle**, consiste à disposer en quantité suffisante des diffuseurs de phéromone de synthèse, pour saturer l'atmosphère de telle sorte que les mâles soient incapables de localiser les femelles, ce qui réduit considérablement la reproduction. Cette technique est de plus en plus utilisée dans les vergers et les vignobles contre les vers et les chenilles, et permet une réduction spectaculaire de l'usage de pesticides. La cible (les vers et les chenilles) est fortement réduite, mais la population de coccinelles par exemple n'est pas touchée, elle peut se développer et se charger utilement de la consommation des pucerons.

Le modèle est proche de ceux présentés dans la section précédente, auquel il faut cependant ajouter un terme de diffusion, dont le coefficient peut dépendre de la concentration, et devenir nulle lorsque la concentration est très faible. Il s'agit d'une diffusion non linéaire, qui limite à un nuage la présence de la concentration, au lieu de lui faire occuper tout l'espace à un taux de concentration proche de zéro. Il faut aussi tenir compte d'un terme d'absorption ou de fixation par le milieu du produit transporté.

On va s'intéresser ici à la propagation et la diffusion du pollen par le vent. On se donne une source $S(x, t)$ qui produit et disperse du pollen. On peut considérer que le support de cette fonction est compact (en x) pour simuler par exemple un champ planté d'une espèce particulière. La vitesse du vent est notée v_0 et à l'échelle de la simulation, on peut la considérer comme constante, ou seulement dépendante du temps t . L'absorption par le sol (et les autres plantes qui s'y trouvent) est représentée par un paramètre f , de fixation. Ce paramètre peut dépendre de la nature du sol, donc de x , et de conditions dépendant du temps t , par exemple s'il pleut ou non. La diffusion est représentée par un terme d'ordre deux, de coefficient noté $\alpha > 0$. On note $q(x, t)$ la densité de pollen au point x , à l'instant t . L'équation de transport s'écrit

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_0 q) = \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + S(x, t) - f H(q) ,$$

où H est une fonction d'Heaviside :

$$H(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > 0 \\ 0 & \text{si } q \leq 0 \end{cases} .$$

On suppose que le domaine considéré est $[0, R]$ est suffisamment grand pour que la densité de pollen produite q n'ait pas le temps d'atteindre les extrémités 0 ou R . Ceci se traduit par les conditions limites

$$q(0, t) = 0 \quad , \quad q(R, t) = 0 .$$

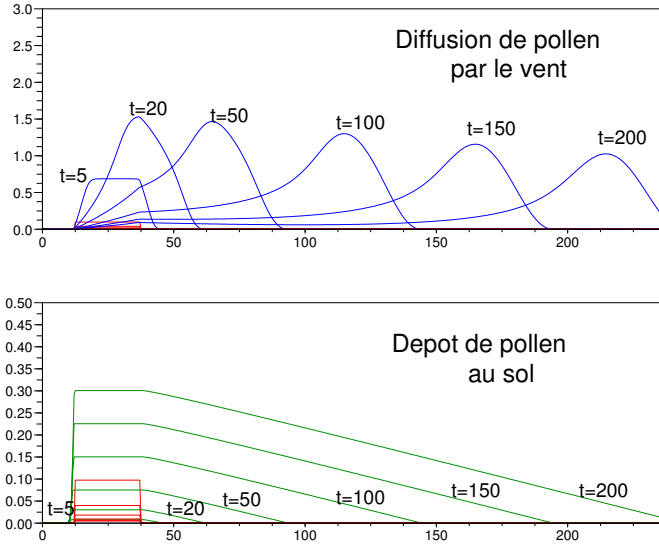
Comme dans la section précédente, on introduit un pas de discrétisation en espace Δx et un pas de discrétisation en temps Δt , on pose $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ et on note q_j^n , S_j^n , f_j^n les approximations

respectives de $q(x_j, t_n)$, de $S(x_j, t^n)$ et de $f(x_j^n)$. Le schéma numérique s'écrit en deux temps. On calcule d'abord une approximation avant dépôt par le paramètre f ,

$$-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tilde{q}_{j-1}^{n+1} + \left(1 + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \tilde{q}_j^{n+1} - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tilde{q}_{j+1}^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t v_0}{\Delta x} (q_j^n - q_{j-1}^n) + \Delta t S_j^n ,$$

puis on réalise le dépôt par la formule

$$q_j^{n+1} = \text{Max} (\tilde{q}_j^{n+1} - \Delta t f_j^n , 0) \quad .$$



Ce schéma fait intervenir une matrice tridiagonale symétrique, et le système linéaire associé est rapidement résolu par une factorisation en deux matrices bidiagonales, l'une supérieure, l'autre inférieure. Dans la simulation présentée ici, la source correspond à un petit intervalle, et se réduit au cours du temps :

$$s(x, t) = \frac{s_0}{1 + \alpha_1 t} \quad , \quad si \ x \in]x_0, x_1[\quad , \quad avec \quad s_0 = 0.2 \quad , \quad s_1 = 0.2 \quad .$$

Le vent souffle de gauche à droite. Le nuage de Pollen est présenté dans le haut de la figure, et le dépôt dans le bas. On note que le dépôt se réalise encore à une bonne distance de la source. Le paramètre f a été pris constant : $f = 0.0015$.

3.3.3 Dynamique de populations : les bactéries, les ravageurs, l'élevage

Ce thème a été abordé une première fois en Section 2.3.3, pour introduire l'âge comme une variable de position. Une autre variable de position est bien entendu l'espace, qui permet de prendre en compte les migrations de la population, ce qui peut être utilisé pour prévoir, puis limiter le risque des migrations de ravageurs dans l'agriculture ou des parasites en général, comme les termites par exemple. Une autre variable de position possible est le poids des individus, qui constitue un élément essentiel pour estimer la maturité d'une population dans un élevage et le risque associé est celui de voir cette population arriver à maturité à une date qui ne coïnciderait pas favorablement à la demande du marché.

Dans un premier exemple, on considère une population de ravageurs située à l'instant initial entre deux zones de ressources $R1$ et $R2$. On veut modéliser sa migration vers ces zones de ressources. On note $R(x, t)$ la densité de ressource et $q(x, t)$ la densité de ravageurs au point x et à l'instant t . Les ravageurs ont la perception de la proximité des ressources et vont se diriger vers ces zones avec une certaine vitesse qui dépend de la distribution des ressources dans l'environnement de sa position actuelle. En effet, il ne s'agit pas d'une réponse locale mais au contraire globale ; le champ de vitesse en un point x est influencé par la distribution globale des ressources sur toute la zone d'étude. Cette influence du champ de vitesse est contrôlée par les paramètres R et $\frac{\partial R}{\partial x}$. De plus, la vitesse est bornée, limitée par les contraintes physiologiques des ravageurs (elle est plus rapide s'ils volent que s'ils rampent par exemple). Dans la simulation illustrant cette section, on a choisi de construire ainsi le champ de vitesse. Connaissant la densité de ressource R sur l'intervalle $[0, L]$ qui est notre domaine d'étude, on calcule la solution de l'équation différentielle

$$-K \frac{d^2 v}{dx^2} + v = \frac{\partial R}{\partial x} \quad ,$$

vérifiant les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0 \quad .$$

On prend ensuite un champ de vitesse de la forme

$$u(x, t) = \text{signe}(v(x)) \frac{\text{Min}(|v(x)|, 1)}{1 + M_0 R(x, t)} \quad .$$

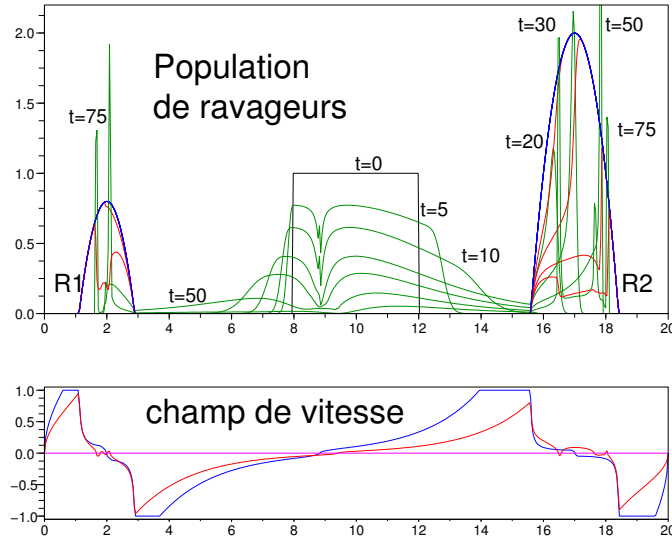
Ainsi, le champ de vitesse est réduit lorsque la ressource est présente : de nombreux ravageurs s'arrêtent pour consommer... La constante M_0 est assez grande (on a pris $M_0 = 10$).

L'équation décrivant la migration des ravageurs est une équation de transport de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) = -\mu(q)q + \lambda_0 R q \quad ,$$

où le paramètre $\mu(q)$ est un taux de mortalité. Il dépend de la densité q parce qu'une plus forte densité va attirer plus sûrement les prédateurs, on même provoquer un traitement, dans le cas de l'agriculture. Dans la simulation, on a pris un taux de la forme

$$\mu(q) = \frac{\mu_0}{1 + \mu_1 q} \quad ,$$



avec $\mu_0 = 0.001$ et $\mu_1 = 30$. Le terme $\lambda_0 R$ correspond à un taux de reproduction. Il ne doit apparaître que sur du long terme en ce qui concerne des insectes, mais doit être pris en compte s'il s'agit d'une population de bactéries par exemple. En effet, les chenilles ou les larves ne sont pas encore des adultes et ne se reproduisent donc pas. A l'inverse, la présence de ressourcee suffisantes va favoriser immédiatement la multiplication d'une population de bactéries. On a pris $\lambda_0 = 0.005$ et l'échelle des ressourcees va de 0 à 2. Cette ressource va également décroître au fur et à mesure de sa consommation par la population de ravageurs. On traduit cette consommation par l'équation différentielle

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -K_0 R q.$$

Elle est à la fois proportionnelle à la ressource restante R , de façon à ne pas devenir négative après être devenue rare, et bien entendu, à la densité de population q qui la consomme. Pour la simulation, la valeur de la constante était $K_0 = 0.12$.

Comme dans la section précédente, on introduit un pas de discrétisation en espace Δx et un pas de discrétisation en temps Δt , on pose $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ et on note q_j^n , R_j^n , u_j^n les approximations respectives de $q(x_j, t_n)$, $R(x_j, t_n)$, $u(x_j, t_n)$. Le calcul du champ de vitesse à partir des la distribution des ressources se fait en deux temps. Dans un premier temps, connaissant les R_j^n , on calcule les variables v_j^n solution de

$$-\frac{K}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + v_j^n = \frac{R_{j+1}^n - R_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

en résolvant un système linéaire tridiagonal, et $v_1^n = v_N^n = 0$. Ensuite, on pose

$$u_j^n = \text{signe}(v_j^n) \frac{\text{Min}(|v_j^n|, 1)}{1 + M_0 R_j^n} .$$

Pour calculer les densités, on utilise le schéma de Godunov, avec traitement implicite des termes de mortalité, pour q , ou de consommation, pour R . On obtient, en posant

$$u_j^{n+} = \max(u_j^n, 0) \quad , \quad u_j^{n-} = \min(u_j^n, 0) \quad ,$$

l'écriture suivante du schéma

$$q_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta t \mu(q_j^n)} \left(q_j^n (1 + \lambda_0 R_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_j^n |u_j^n| - q_{j-1}^n u_{j-1}^{n+} + q_{j+1}^n u_{j+1}^{n-}) \right) .$$

Ensuite, la ressource est actualisée ainsi

$$R_j^{n+1} = \frac{R_j^n}{1 + \Delta t K_0 q_j^{n+1}} .$$

La simulation fait apparaître clairement la mise en mouvement de la population, qui se scinde en deux. La ressource $R2$ plus proche et plus importante est atteinte la première, et la ressource $R1$ beaucoup plus tard. La consommation se fait au niveau de plusieurs fronts, où les densités de population deviennent importantes, donc plus visibles et plus exposées aux prédateurs ou aux traitements. Les résultats présentés correspondent aux instants 0, 5, 10, 20, 30, 50 et 75. Les distributions de densités de population sont représentées en noir ($t = 0$) puis en vert. Les densités de ressources sont représentées en bleu ($t = 0$) puis en rouge. La figure présente également le champ de vitesse initial, en bleu, puis le dernier champ de vitesse ($t = 75$) en rouge.

En élevage, la gestion d'un troupeau se représente de façon similaire, la variable de position étant ici le poids, et la variable d'évolution étant à la fois le temps ou l'âge, l'un étant simplement le translaté de l'autre lorsque tous les éléments du troupeau sont de même âge. On reprend les mêmes notations, en notant $q(x, t)$ la densité de têtes de poids x à l'instant t , c'est à dire que le nombre de têtes dont le poids est compris entre x et $x + \Delta x$ est égal à $q(x, t)\Delta x$ à l'instant t . La vitesse notée $u(x, t)$ est une vitesse de prise de poids, et dépend du poids x et de l'âge, donc de t . L'âge est noté

$$a = t - t_0$$

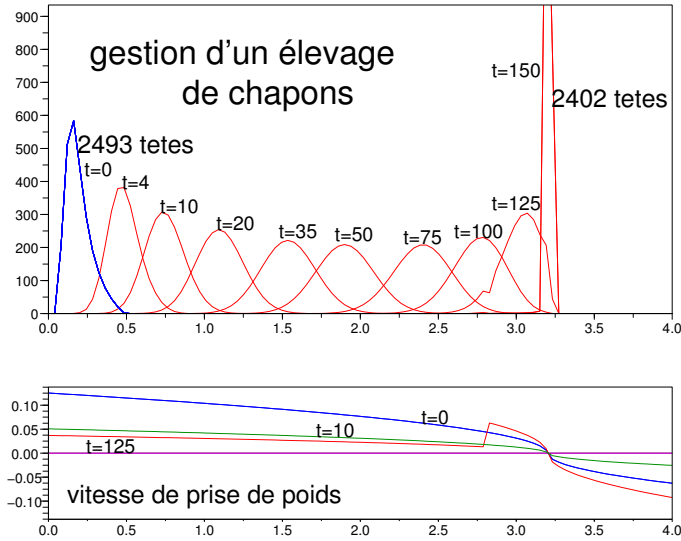
où t_0 correspond à la date de naissance, la même pour tous, dans le but de simplifier.

Le modèle est constitué d'une équation de transport de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)q) = - \mu(t, x) q ,$$

où le paramètre $\mu(x, t)$ est un paramètre de mortalité.

On se propose de modéliser ici un élevage de chapons, qui doivent être abattus au bout de 150 jours minimum, avec un poids effilé de 3.1 kg. A partir du 125^{ème} jour, la gestion de l'alimentation



est adaptée pour atteindre cet objectif. La figure précédente représente les résultats obtenus par le schéma de Gudunov, en adoptant le contrôle suivant de la prise de poids :

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0 + \beta_0 a}{1 + \beta_1 a} \text{signe}(x_0 - x) \sqrt{|x_0 - x|} (1 + F(a)) ,$$

avec $\alpha_0 = 0.12$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = 1$, et

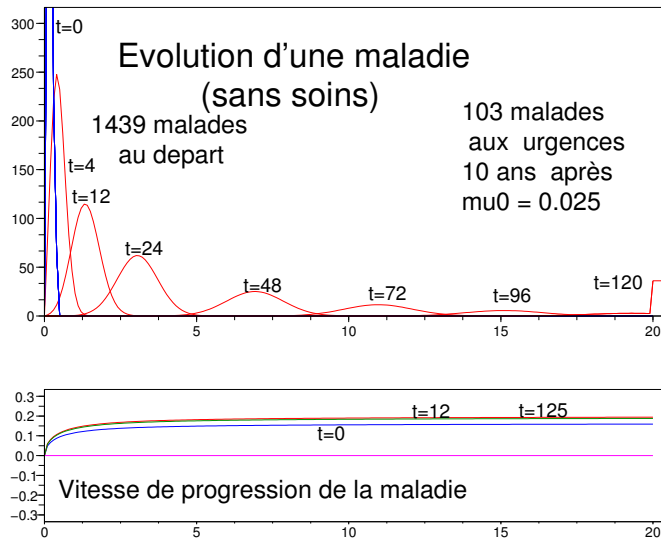
$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 125 \\ 4 & \text{si } a \geq 125 \end{cases} .$$

Cette fonction $F(a)$ correspond à l'engraissement final, qui intervient après la claustration des volailles, soit après le 125^{ème} jour. Le modèle numérique reproduit correctement les résultats attendus, et notamment la période finale, et la gestion de la nourriture pour parvenir à un poids optimal pour chacun des chapons au bout de 150 jours. La baisse d'effectif est due à la fragilité des volailles en début de vie, puis au moment de la claustration.

3.3.4 Les questions de santé : évolution d'une maladie

On s'intéresse maintenant à la modélisation du développement d'une maladie, qui reste très proche de la modélisation de l'élevage de chapons présentée dans la section précédente. Bien que les applications soient très différentes, le même programme de calcul peut être exploité dans les deux cas, avec des modifications mineures, concernant essentiellement les échelles des données et les valeurs

des paramètres. Cependant, si pour les chapons, l'objectif est d'arriver à amener le maximum de la population au poids idéal avant l'abattage, il est ici de retrouver un minimum de malades aux urgences de l'hôpital. La vitesse de progression de la maladie peut être limitée par l'administration de soins, comme la vitesse de prise de poids des chapons était limitée par le contrôle de la nourriture. L'âge correspond ici au temps passé depuis la déclaration de la maladie.

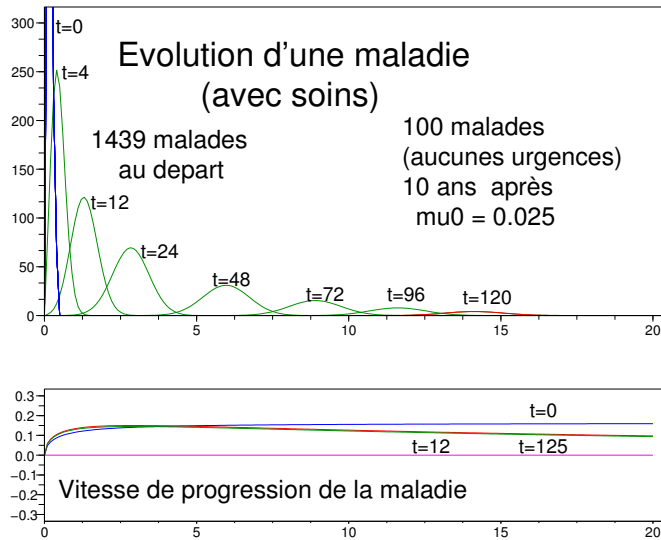


Il s'agit d'une maladie aux aspects cumulatifs, comme par exemple les allergies, et on va s'intéresser à la classe des malades développant les symptômes maximaux, c'est à dire les plus avancés par rapport à l'âge de la maladie. Les autres malades seront "déclassés", c'est à dire éliminés de l'effectif des malades, pour ne plus y apparaître. En pratique, il faudrait étudier simultanément plusieurs classes, impliquant la prise en compte de plusieurs équations d'ondes simultanément, et qui est l'objet des chapitres ultérieurs.

Les différents états de la maladie sont reproduits sur une échelle allant de 0 à 20, la valeur $x = 20$ correspondant à l'état de crise grave, le malade doit être traité aux urgences de l'hôpital (par exemple, pour les allergies, il aura développé un angio-oedème). Le modèle est constitué d'une équation de transport de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)q) = -\mu(t, x) q ,$$

où le paramètre $\mu(x, t)$ n'est pas un paramètre de mortalité, mais correspond au déclassement mentionné plus haut. La densité $q(x, t)$ représente les malades au niveau d'avancement x , à l'instant



t , c'est à dire que le nombre de malades entre les niveaux x et $x + \Delta x$ est représenté par $q(x, t)\Delta x$. Le coefficient de déclassement est choisi de la forme

$$\mu(x) = \mu_0 \frac{x^2}{1 + x^2} ,$$

de façon à être faible en début de maladie, puis aller vers la valeur asymptotique μ_0 ensuite. La vitesse de progression de la maladie quand il n'y a **pas de soins** est choisie de la forme

$$u(x, t) = \beta_0 \sqrt{\frac{x}{1 + \beta_1 x} \frac{a}{1 + a}}$$

avec $a = t - t_0$ représentant le temps écoulé depuis la déclaration de la maladie à l'instant t_0 . Cette formule permet de représenter un profil croissant, convergent vers une valeur asymptotique β_0 . Lorsque des **soins sont administrés**, la vitesse de progression devient plus faible à terme. On propose par exemple la modification suivante de la formule précédente :

$$u(x, t) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_s x} \sqrt{\frac{x}{1 + \beta_1 x} \frac{a}{1 + a}} ,$$

avec $\beta_s > 0$. Les deux cas ont été calculés, sur une période de 10 ans, à partir d'un échantillon de 1439 malades ayant déclaré la maladie au même moment. L'unité de temps est le mois. Dans les deux cas, on a choisi

$$\mu_0 = 0.025 , \quad \beta_0 = 0.2 , \quad \beta_1 = 1 ,$$

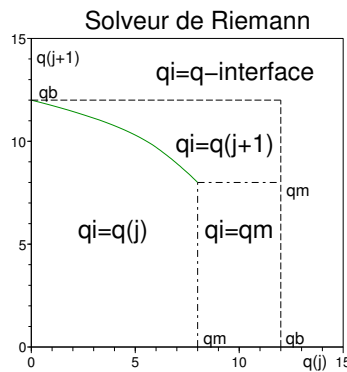
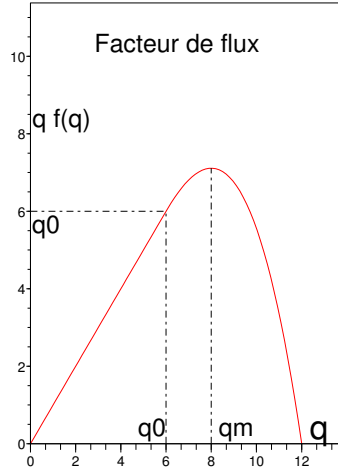
et lorsque des soins sont administrés, $\beta_s = 0.05$. On observe une très nette différence entre les deux cas, bien qu'au niveau des valeurs les vitesses soient relativement peu différentes. Le schéma utilisé est le schéma de Godunov, exactement le même que celui exploité pour l'exemple des chapons.

3.3.5 Les mouvements de foules

On veut modéliser les premiers instants de l'évacuation de N personnes se trouvant à proximité immédiate d'un point où un danger particulier vient de survenir, un départ d'incendie par exemple, afin de valider un plan d'évacuation. Le point "danger" est pris en $x = 0$, et on se restreint d'abord au cas d'une seule dimension d'espace (le long d'un couloir ou d'un itinéraire d'évacuation, par exemple). On note $t = 0$ l'instant où l'alerte ou l'ordre d'évacuation a été donné.

A la différence du trafic routier, où les automobiliste cherche à maintenir une vitesse proche de la vitesse maximale autorisée, ces personnes ne vont rechercher une vitesse maximale possible que dans le voisinage immédiat du point danger, elles vont courir. Au delà d'une certaine distance de sécurité, la vitesse va se réduire pour se stabiliser à la vitesse de la marche, si aucun autre incident ne vient perturber ce comportement. On note $u_0(x)$ ce profil de vitesse, à la distance x du point danger. Il est rapidement croissant près de l'origine, puis décroît régulièrement par la suite, pour atteindre une valeur asymptotique proche de la vitesse unité (soit 1 ms^{-1} ou 3.6 km h^{-1}).

Par contre, et ceci est analogue au cas du trafic routier, cette vitesse peut être réduite en fonction de la densité des personnes qui se déplacent. Il existe une **densité de blocage**, notée q_b , qui impose l'arrêt des personnes situées en arrière de ce point, ne pouvant plus avancer.



On note $q(x, t)$ la densité des personnes au point x , à l'instant t . L'encombrement est représenté par un **facteur de flux**, noté $f(q)$, qui se présente comme une fonction continue de q , positive, concave, décroissante, valant 1 pour $q \leq q_0$, le seuil de la première gêne, et valant 0 lorsque $q = q_b$, la densité de blocage.. Dans la simulation numérique, on a pris

$$f(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \leq q_0 \\ 1 - \left| \frac{q - q_0}{q_b - q_0} \right|^2 & \text{si } q_0 \leq q \leq q_b \end{cases}.$$

La vitesse effective est donnée par le produit $u_0(x) f(q(x, t))$ au point x , à l'instant t . Le déplacement de la densité $q(x, t)$ est assuré par l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 f(q) q) = 0,$$

où le terme

$$u_0 f(q) q$$

correspond au **flux**. Le graphe de $g(q) = q f(q)$ est représenté ci dessus.

A la différence des autres exemples de la dynamique des populations, le flux est ici une fonction non linéaire de la densité. Le terme $g(q) = q f(q)$ est une fonction continue, concave, nulle en $q = q_b$ et en $q = 0$, positive sur l'intervalle $]0, q_b[$. Elle passe donc par un maximum en un point que l'on notera q_m . Dans notre exemple, où $f(q)$ est régulière, la valeur de q_m est obtenue en résolvant

$$q f'(q) + f(q) = 0,$$

ce qui donne

$$q_m = \frac{1}{3} \left(2q_0 + \sqrt{q_0^2 + 3(q_b - q_0)^2} \right),$$

et on note que

$$q_0 < q_m < q_b.$$

La mise en oeuvre numérique utilise le schéma de Godunov, qui nécessite un calcul de flux à chaque interface entre les mailles et une condition de stabilité (CFL). Les notations discrètes sont les mêmes que dans les autres cas d'utilisation du schéma de Godunov. Le calcul des flux aux interfaces, notés

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

pour l'interface situé entre la maille $N^\circ j$ et la maille $N^\circ j + 1$ se fait par un solveur de Riemann, qui évalue

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n \operatorname{Inf}_{k \in I_{j+\frac{1}{2}}^n} \left(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n u_0(x_{j+\frac{1}{2}}^n) k f(k) \right),$$

avec

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = \operatorname{signe}(q_{j+1}^n - q_j^n),$$

et où $I_{j+\frac{1}{2}}^n$ est l'intervalle dont les extrémités sont q_j^n et q_{j+1}^n . Il n'y a que trois valeurs à tester, à savoir q_j , q_{j+1} et q_m si $q_m \in I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Le solveur donne la valeur intermédiaire

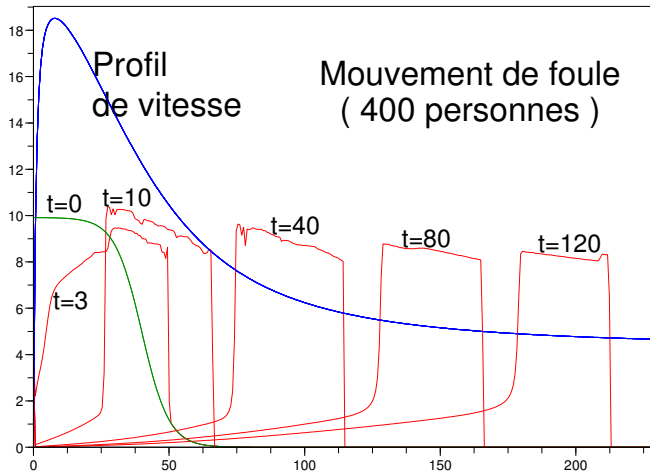
$$q_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} q_j^n & \text{si } q_j^n < q_m \text{ et } q(q_j^n) > g(q_{j+1}^n) \\ q_{j+1}^n & \text{si } q_{j+1}^n > q_m \text{ et } g(q_j^n) < g(q_{j+1}^n) \\ q_m & \text{si } q_j^n > q_m \text{ et } q_{j+1}^n < q_m \end{cases} .$$

Le choix est représenté par un graphique sur une figure précédente. On prend ensuite $x_{j+\frac{1}{2}}^n$ tel que

$$u_0 \left(x_{j+\frac{1}{2}}^n \right) = \begin{cases} u_0(x_j) & \text{si } q_{j+\frac{1}{2}}^n = q_j^n , \\ u_0(x_{j+1}) & \text{si } q_{j+\frac{1}{2}}^n = q_{j+1}^n , \\ \frac{u_0(x_j) + u_0(x_{j+1})}{2} & \text{si } q_{j+\frac{1}{2}}^n = q_m \end{cases} .$$

Le schéma de Godunov s'écrit ensuite

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{j+\frac{1}{2}}^n - A_{j-\frac{1}{2}}^n \right) .$$



Ce schéma nécessite la condition de stabilité CFL, impliquant la vitesse caractéristique

$$u(x) (q f'(q) + f(q)) .$$

Comme

$$\frac{d}{dq} (q f'(q) + f(q)) = q f''(q) + 2f'(q) < 0 ,$$

la vitesse caractéristique est une fonction décroissante de q et atteint sa valeur (absolue) maximale soit en $q = 0$, soit en $q = q_b$. La condition CFL s'écrit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_{x>0} (|u_0(x)|) \max(1, q_b |f'(q_b)|) \leq 1 .$$

Dans la simulation représentée plus haut, où $q_b = 12$ et $q_0 = 6$, ce qui donne $q_m = 8$, ce maximum est réalisé par $q_b |f'(q_b)|$. le profil initial est de la forme

$$q(x, 0) = C_q (1 + \tanh(A_q(x_q - x))) , \text{ avec } C_q = 4.95842 , A_q = 0.1 , x_q = 40 ,$$

choisis de telle façon que 400 personnes soient regroupées dans un périmètre de 35 mètres du point "danger". On observe le déplacement d'un profil présentant, à terme, un front vertical décroissant, correspondant à la partie rectiligne du graphe de $g(q) = qf(q)$, pour $q < q_0$ ($= 6$ ici) , suivi d'une détente correspondant à la partie maximale du graphe de $g(q)$, puis d'un choc (partie verticale croissante) et enfin une petite détente, le reliant au point "danger". On ne retrouve pas sur la figure des résultats, la valeur q_0 au niveau du profil, ce qui s'interprète comme un effet du terme source induit par la dépendance en x de la vitesse $u_0(x)$. En effet, l'équation de transport s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_0(x) (q f'(q) + f(q)) \frac{\partial q}{\partial x} + u'_0(x) q f(q) = 0 ,$$

où apparaît bien un terme source $u'_0(x) q f(q)$ qui vient augmenter la densité lorsque $u'_0(x)$ est négatif, ce qui est le cas au delà $x = 8$ m. La même remarque explique la petite onde de raréfaction qui suit le choc. On observe aussi quelques oscillations dans la partie haute du profil, qu'on peut attribuer au choix de la valeur de $u_0(x_{j+\frac{1}{2}}^n)$ lorsque $q_{j+\frac{1}{2}}^n = q_m$. Notons que cette simulation ne fait pas apparaître de blocage, la voie étant "libre" devant le groupe en mouvement.

On peut aussi représenter des obstacles, en faisant dépendre à ce niveau les paramètres q_0 et q_b de la variable x . Ainsi, on simule un étranglement en limitant la valeur de q_b localement, et dans ce cas on peut voir apparaître des situations de blocage.

On peut généraliser la dimension un en prenant une représentation radiale, la densité devenant dans ce cas $xq(x, t)$ au lieu de $q(x, t)$, la variable x étant la distance radiale, le pôle étant bien entendu en $x = 0$.

Chapitre 4

Les systèmes à plusieurs ondes

4.1 Les systèmes hyperboliques

On s'intéresse ici à des situations où interviennent plusieurs ondes à la fois. L'état d'une telle situation est décrit par plusieurs paramètres, par exemple la vitesse et la profondeur de l'eau en hydraulique, la densité, la pression et la vitesse dans un gaz, deux ou plusieurs classes différentes dans une population, dans un portefeuille de valeurs, différentes phases chimiques, etc...

Chaque paramètre nécessite qu'il soit décrit par une équation et si N est le nombre de ces paramètres, on s'attend à devoir manipuler un système de N équations. On note u_1, u_2, \dots, u_N ces différents paramètres. Chaque paramètre u_j est donc concerné par une équation de la forme

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) = 0 ,$$

où la matrice des coefficients $A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots)$ assure le couplage des équations entre elles. Cette matrice est appelée **matrice de flux**. Les termes S_j constituent d'éventuels termes sources.

On considère une onde particulière, dont on note ϕ son profil. Le paramètre ϕ est bien entendu lié aux différents paramètres u_j et bien souvent il s'agit de l'un d'entre eux. Inversement, au niveau de l'onde, chacun des paramètres u_j peut s'exprimer comme une fonction du profil ϕ , par une relation qu'on écrit

$$u_j = u_j(\phi)$$

étant bien entendu que s'il n'y a pas de dépendance entre u_j et ϕ , on a tout simplement $u'_j(\phi) = 0$. On exige cependant

$$\exists j_0 \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ tel que } u'_{j_0}(\phi) \neq 0 ,$$

sinon le profil ϕ n'aurait rien à voir avec le système proposé.

Le profil ϕ , correspondant à une onde, doit satisfaire à une équation d'onde, de la forme décrite au Chapitre 2, à savoir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(\phi, x, t, \dots) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S(\phi, x, t, \dots) = 0 ,$$

où la vitesse caractéristique $\lambda(\phi, x, t, ..)$ doit absolument être un nombre **réel**. Cette équation d'onde doit aussi être compatible avec le système proposé au départ.

En introduisant les relations $u_j = u_j(\phi)$ dans le système de départ, on obtient pour chaque valeur de j ,

$$u'_j(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\sum_{k=1}^N A_{jk} u'_k(\phi) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S_j = 0 ,$$

que l'on compare avec l'équation d'onde vérifiée par ϕ , qu'on a préalablement multipliée par $u'_j(\phi)$. Il apparaît une première condition de compatibilité, indépendamment des termes sources :

$$\forall j \in \{1, 2, .., N\} \quad \sum_{k=1}^N A_{jk} u'_k(\phi) = \lambda u'_j(\phi) .$$

Cette condition impose que λ soit une valeur propre de la matrice de flux (A_{jk}) et le vecteur propre associé est colinéaire au vecteur $(u'_1(\phi), u'_2(\phi), .., u'_N(\phi))$ qui est non nul car au moins une de ses composantes $(u'_{j_0}(\phi))$ est non nulle.

Pour que le système proposé décrive correctement la propagation de N ondes on doit donc exiger que les valeurs propres de la matrice de flux (A_{jk}) soient toutes réelles. De plus, afin de pouvoir identifier chaque onde, il est naturel d'exiger que les vitesses caractéristiques soient différentes. Toutefois, on peut accepter les vitesses caractéristiques identiques pour deux ondes différentes, à condition qu'il y ait une certaine indépendance entre elles, ce qu'on traduira par des sous espaces propres de dimension égale à la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Les systèmes réalisant cette condition seront appelés des **systèmes strictement hyperboliques**, ce qu'on reprend dans la définition suivante :

Définition 4.1.1 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^N A_{j,k} (u_1, u_2, .., u_N, x, t, ..) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, .., x, t, ..) = 0$$

*est dit un **système hyperbolique** lorsque toutes les valeurs propres de la matrice de flux (A_{jk}) sont réelles. Il est dit **stictement hyperbolique** lorsque cette matrice de flux est **diagonalisable**.*

Lorsqu'une valeur propre est multiple, avec un sous espace propre dont la dimension est inférieure à cette multiplicité, on doit se poser la question de l'opportunité de réduire le système d'une équation.

Considérons une nouvelle fois l'onde particulière dont le profil était noté ϕ ci dessus. La vitesse caractéristique associée dépend des différents paramètres $u_1, u_2, ..u_N$, mais reste une fonction de ϕ par l'intermédiaire des fonctions $u_j(\phi)$. On écrit

$$\lambda(\phi, x, t, ..) = \lambda(u_1(\phi), u_2(\phi), ..., u_N(\phi), x, t, ..) .$$

L'onde est **vraiment non linéaire** lorsque $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} \neq 0$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} u'_k(\phi) \neq 0 .$$

Elle est **linéairement dégénérée** dans le cas contraire. En notant $\nabla\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_1}, \frac{\partial\lambda}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\lambda}{\partial u_N} \right)$ et R le vecteur propre associé, que l'on sait colinéaire à $(u'_1, u'_2, \dots, u'_N)$ on a la caractérisation suivante :

Définition 4.1.2 *L'onde est vraiment non linéaire lorsque $\nabla\lambda.R \neq 0$. Elle est au contraire linéairement dégénérée lorsque $\nabla\lambda.R = 0$.*

La présence des termes sources n'influence ni le caractère hyperbolique, ni la nature des ondes (vraiment non linéaire ou linéairement dégénérée). Notons simplement cette relation entre S et chacun des S_j :

$$S_j(u_1(\phi), u_2(\phi), \dots, u_N(\phi), x, t, \dots) = u'_j(\phi) S(\phi, x, t, \dots)$$

L'un des paramètres u_1, u_2, \dots, u_N est une **variable conservative** lorsque l'équation correspondante

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) = 0 ,$$

peut engendrer un champ conservatif de source S_j , c'est à dire qu'il existe un potentiel noté $F_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots)$ pour lequel cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots)) = 0$$

avec une éventuelle modification du terme source lorsqu'il y a effectivement une dépendance en x . On a nécessairement, dans ce cas

$$A_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial u_k} ,$$

et aussi la possibilité d'écrire la **relation de Rankine Hugoniot** au niveau d'un choc se propageant le long d'une trajectoire $x = x(t)$, c'est à dire

$$x'(t) = \frac{F_j(u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{N,2}) - F_j(u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{j,2} - u_{j,1}} ,$$

en notant respectivement $(u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1})$ et $(u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{N,2})$ les valeurs à gauche et à droite du choc.

Le système des N équations est un **système conservatif** lorsque chacune des variables u_j est une variable conservative. Dans ce cas il existe un vecteur de **flux** noté

$$F(u_1, u_2, \dots, u_N) = (F_1(u_1, u_2, \dots, u_N), F_2(u_1, u_2, \dots, u_N), \dots, F_N(u_1, u_2, \dots, u_N))$$

dont la **jacobienne** est la matrice de flux (A_{jk}) ; on l'appelle dans ce cas la **jacobienne de flux**.

Lorsqu'un système est conservatif, les différentes relations induites par la relation de Rankine-Hugoniot doivent correspondre à la même vitesse du choc. Ceci donne $N - 1$ **relations de compatibilité** liant les états situés à gauche et à droite du choc. Ces relations s'écrivent

$$\forall j, k \neq j \quad \frac{F_j(u_{1,2}, \dots, u_{N,2}) - F_j(u_{1,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{j,2} - u_{j,1}} = \frac{F_k(u_{1,2}, \dots, u_{N,2}) - F_k(u_{1,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{k,2} - u_{k,1}} .$$

Un **problème hyperbolique d'ordre N** consiste en la donnée d'un système hyperbolique de N équations, et d'autant de **conditions initiales**

$$u_1(x, 0) = u_{1,0}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{2,0}(x), \quad \dots, \quad u_N(x, 0) = u_{N,0}(x)$$

pour initialiser chacun des paramètres.

4.2 L'exemple de référence : l'équation des ondes

On reprend l'**équation des ondes** sous sa forme habituelle

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

que l'on utilise par exemple pour modéliser les cordes vibrantes, la variable w correspondant alors à un déplacement par rapport à une position au repos. Le paramètre $c > 0$ est une constante représentant la vitesse du son dans le matériau constituant cette corde vibrante. On introduit la vitesse v et une contrainte u définies par

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad u = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

et qui sont liées par la relation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial t},$$

d'où une première équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Une seconde équation s'obtient naturellement en introduisant $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\partial u}{\partial x}$ dans l'équation des ondes et s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Le système constitué de ces deux équations est bien de la forme d'un système hyperbolique et la matrice de flux correspondante est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -c$ et $\lambda_2 = +c$; ces valeurs propres sont réelles et différentes, et donc le système est bien strictement hyperbolique.

Considérons maintenant l'équation suivante, qui semble proche de l'équation des ondes,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

En procédant comme ci dessus, on obtiendrait le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

dont la matrice de flux est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont ici $-ic$ et ic où i est l'unité imaginaire de \mathbb{C} . Ce système n'est pas hyperbolique.

La **transformation de Fourier** d'une fonction $w \in L^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est définie par

$$\hat{w}(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-i\tau t - i\xi x} w(x, t) dx dt ,$$

en notant (ξ, τ) la variable de Fourier. Elle a la propriété intéressante de transformer les dérivées en produit. Ainsi, on a immédiatement

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-i\tau t - i\xi x} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx dt = i\xi \hat{w}(\xi, \tau) ,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-i\tau t - i\xi x} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx dt = i\tau \hat{w}(\xi, \tau) - \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} w(x, 0) dx .$$

En procédant à une transformation de Fourier sur l'équation des ondes, on obtient un coefficient de la forme

$$-\tau^2 + c^2 \xi^2 .$$

Les équations de la forme $\tau^2 - c^2 \xi^2 = \text{Constante}$ correspondent à des hyperboles dans le plan de phase, c'est à dire le plan des (ξ, τ) . La même transformation sur l'autre équation conduit à des coefficients de la forme $-\tau^2 - c^2 \xi^2$ et à des courbes d'équation $\tau^2 + c^2 \xi^2 = \text{Constante}$, qui représentent des ellipses dans ce même plan de phase.

Cette remarque explique la terminologie "**hyperbolique**" pour désigner les systèmes qui nous intéressent ici. Dans le cas de l'autre équation et pour les mêmes raisons, il s'agit d'une équation **elliptique** dont l'analyse est très différente de celle présentée ici.

L'**équation des cables** constitue une généralisation non linéaire de l'équation des cordes vibrantes. On note encore w le déplacement d'un cable extensible, tendu (comme un fil électrique entre deux poteaux, par exemple) par rapport à une position au repos. Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) ,$$

où f est une fonction donnée, impaire, strictement croissante et suffisamment régulière. En pratique, f est de la forme

$$f(u) = c u \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha)^2 + u^2}} \right) ,$$

où $\alpha (> 0)$ correspond à un coefficient de tension du cable : la longueur initiale l_0 est portée à $l_0(1 + \alpha)$ par la tension, et c est un coefficient correspondant aux propriétés mécaniques du cable.

En posant $v = \frac{\partial w}{\partial t}$ et $u = -\frac{\partial w}{\partial x}$ comme ci dessus, on obtient le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 ,$$

en utilisant le fait que f soit une fonction impaire. Les valeurs propres de la matrice de flux sont

$$\lambda_1 = -\sqrt{f'(u)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = +\sqrt{f'(u)}$$

et la stricte hyperbolicité exige que f soit une fonction strictement croissante, ce qui est bien le cas ici.

4.3 Les systèmes physiques d'ordre 2

On considère ici un système de deux ondes dont la première équation est une **équation de transport** d'une quantité q interprétée comme une **densité** déplacée par un **flux** m , c'est à dire

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad .$$

Le système modélisant deux ondes, la seconde équation est nécessairement de la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial m}{\partial x} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 \quad ,$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice de flux, indicées de telle façon que l'inégalité $\lambda_1 < \lambda_2$ soit toujours assurée. En effet cette matrice de flux est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad ,$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha} \right) \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha} \right) \quad ,$$

d'où $\beta = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\alpha = -\lambda_1 \lambda_2$.

Ces valeurs propres sont a priori des fonctions de q et m . En posant

$$u(q, m) = \frac{\lambda_1(q, m) + \lambda_2(q, m)}{2} \quad , \quad c(q, m) = \frac{\lambda_2(q, m) - \lambda_1(q, m)}{2} \quad ,$$

on obtient cette autre écriture de la seconde équation :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 \quad .$$

Notons que la matrice de flux n'est pas diagonalisable lorsque la valeur propre est double, ce qui implique que la fonction $c = c(q, m)$ ne peut pas être nulle. On a toujours $c > 0$ du fait du choix des indices assurant $\lambda_1 < \lambda_2$.

Un premier principe physique est celui de l'**invariance par changement de repère galiléen**. Ce principe consiste par exemple à exprimer qu'un observateur "fixe", par exemple un pêcheur assis au bord de l'eau, et un observateur "mobile", par exemple un jogger courant le long de la rive à une vitesse α constante, voient exactement la même chose en ce qui concerne la profondeur d'eau

q , mais des flux différents compte tenu de la différence des vitesses. On effectue le changement de variables suivant

$$y = x + \alpha t , \quad s = t ,$$

avec α constant, pour connaître la perception de l'observateur mobile (le jogger). Pour toute quantité Q , on a, par ce changement de variable,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial s} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} .$$

Le système devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} + \alpha \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y} &= 0 , \\ \frac{\partial m}{\partial s} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial q}{\partial y} + (\alpha + \lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial m}{\partial y} &= 0 . \end{aligned}$$

On observe la modification du flux en $\tilde{m} = m + \alpha q$, sans modification de la profondeur q . Avec ce nouveau flux \tilde{m} , les équations se transforment en

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{m}}{\partial y} &= 0 , \\ \frac{\partial \tilde{m}}{\partial s} - (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha) \frac{\partial q}{\partial y} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha) \frac{\partial \tilde{m}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

et on remarque que les deux valeurs propres ont été augmentées de la quantité α . Reprenons les quantité u et c définies précédemment par,

$$u = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} , \quad c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} .$$

Ainsi, par la transformation précédente, la quantité u est augmentée de la valeur α , et la quantité c ne subit aucune variation. On en déduit qu'elle peut ne pas dépendre de m , c'est à dire que dans certains cas, elle vérifiera la condition

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 .$$

En effet, on a, pour tout α , lorsque c ne dépend pas de m ,

$$c(q, m + \alpha q) = c(q, m)$$

on encore

$$\frac{c(q, m + \alpha q) - c(q, m)}{\alpha q} = 0 ,$$

et le passage à la limite lorsque α tend vers zéro donne bien la condition $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$.

Cette condition n'est cependant pas toujours vérifiée par c , par exemple lorsque λ_1 et λ_2 dépendent de m de telle façon que

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial m} \neq \frac{\partial \lambda_1}{\partial m}$$

et dans ce cas,

$$\frac{\partial c}{\partial m} \neq 0 ,$$

mais reste non modifié par le changement de repère. Ceci permet d'introduire la définition suivante.

Définition 4.3.1 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0$$

est invariant par transformation galiléenne lorsque

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 \ .$$

On définit ensuite un **système physiquement réaliste**, que l'on veut être bien représentatif du caractère physique du modèle envisagé, de la façon suivante.

Définition 4.3.2 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0$$

est un système physiquement réaliste lorsqu'il est invariant par transformation galiléenne, c'est à dire $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$, de forme conservative et lorsqu'une densité $q = 0$ correspond toujours à un flux $m = 0$ (condition de flux nul).

Cette définition permet de caractériser une vaste classe de modèles pour lesquels on obtient des résultats dont la réalité physique est très pertinente, comme celui-ci.

Théorème 4.3.3 *Dans un système physiquement réaliste, on a nécessairement*

$$u = \frac{m}{q} \ .$$

Inversement, un système conservatif, de la forme précédente, vérifiant la relation $u = \frac{m}{q}$ est un système physiquement réaliste.

Démonstration : Le système admettant une forme conservative en les variables q et m , la seconde équation correspond à un champ conservatif de source S , et peut s'écrire

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0 \ .$$

En identifiant avec la forme précédente de l'équation, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial q} = c^2 - u^2 \ , \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 2u \ ,$$

et en calculant de deux façons différentes $\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial m}$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = c \frac{\partial c}{\partial m} \ .$$

Or le système est invariant par transformation galiléenne, donc $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$, et il reste

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = 0 ,$$

c'est à dire que u est une solution de l'équation de Burgers avec q comme variable d'évolution et m comme variable de position. De plus, on sait qu'elle est portée par une caractéristique passant par le point $q = 0, m = 0$, et donc, d'après le Chapitre 2, cette caractéristique est une droite de pente constante u , c'est à dire la droite $m = q u$, d'où le résultat.

Inversement, si $m = qu$, la condition de flux nul est assurée. Le système étant conservatif, on retrouve l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = c \frac{\partial c}{\partial m} .$$

Or $u = \frac{m}{q}$ est solution de l'équation de Burgers, c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = 0$, et donc, sachant $c > 0$, on en déduit $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$. Le système est bien invariant par transformation galiléenne.

On obtient ainsi l'expression de la quantité u , à savoir

$$u = \frac{m}{q} ,$$

qui correspond effectivement à une vitesse, et plus précisément la vitesse de la matière. Ainsi la variable $m = qu$ correspond à une **quantité de mouvement**, et les deux équations du système correspondent à la **conservation de la masse** pour la première, la **conservation de la quantité de mouvement** pour la seconde. Il ne reste plus pour définir un modèle physique qu'à donner l'expression de $c = c(q)$, qui correspond également à une vitesse, à savoir la **vitesse du son** ou la **vitesse critique**, selon les applications. Pour cela, il peut être très utile de calculer l'accélération $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$, pour obtenir l'**équation dynamique**

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(q)^2 \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

En introduisant une variable $P = P(q)$ telle que $P'(q) = c(q)^2$, cette équation dynamique prend la forme

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

Cette variable P correspond à une **pression**. Elle est déterminée par des mesures expérimentales dans la plupart des cas, ce qui constitue une **loi d'état**.

On peut maintenant intégrer les équations

$$\frac{\partial F}{\partial q} = c^2 - u^2 , \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 2 u ,$$

pour obtenir à une constante près, le **flux de m** ,

$$F(q, m) = \frac{m^2}{q} + P(q) ,$$

qui a la dimension d'une énergie.

4.3.1 Le système de Saint-Venant

Il s'agit du modèle le plus utilisé en hydraulique. La quantité q correspond à la profondeur d'eau, et u à sa vitesse, s'agissant d'un modèle physiquement réaliste. On reprend l'équation dynamique précédente, qu'on écrit sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c(q)^2}{q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{S(q, m)}{q} = 0 \quad .$$

On fait maintenant l'hypothèse suivante : pour $S = 0$, la variation de la vitesse est indépendante de la profondeur. Autrement dit, seule une variation du profil de la surface peut engendrer une mise en vitesse. On en déduit que la quantité

$$\frac{c(q)^2}{q} \quad \text{RESTE CONSTATE.}$$

Cette constante est bien connue, il s'agit de la **constante de gravité** notée habituellement g , dont la valeur en unités MKS est $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ à Paris, ou $g = 9.806 \text{ ms}^{-2}$ à Bordeaux, et, pour être plus précis,

$$g = 9.780327 \left(1 + 0.0053 \sin^2 \phi \right) - 0.3086 \cdot 10^{-5} z \quad ,$$

en un point de latitude ϕ et d'altitude z . On en déduit l'expression de $c(q)$,

$$c(q) = \sqrt{gq} \quad .$$

La variable $c(q)$ est homogène à une vitesse, et on l'appelle la **vitesse critique**. Le nombre

$$F = \frac{|u|}{c(q)}$$

est appelé **nombre de Froude**, et joue un rôle comparable au nombre de Mach en hydrodynamique. Pour $F > 1$, le régime est dit **torrentiel** ou **supercritique**, et pour $F < 1$ il est dit **fluvial** ou **subcritique**. L'hypothèse d'indépendance de la profondeur sur la variation de la vitesse correspond effectivement à une limite du modèle, liée à la profondeur de l'eau. Pour une profondeur de 100 mètres, par exemple, une onde va progresser de 10 mètres environ en une seconde, et pendant ce même temps, il y aura eu au moins 8 interactions avec le fond, la vitesse du son dans l'eau étant proche de 1600 mètres par seconde. Le modèle de Saint-Venant est donc tout à fait justifié pour une profondeur de cet ordre. Maintenant, pour une profondeur de 1000 mètres, il faut compter 1.25 seconde pour avoir une seule interaction avec le fond, et pendant ce même temps, une onde aura parcouru 124 mètres en surface. Le modèle n'est plus adapté à ce cas, sauf si la longueur d'onde est suffisante pour que plusieurs dizaines d'aller-retours entre le fond et la surface puissent avoir lieu. Ainsi, des spécialistes des Tsunamis n'hésitent pas à utiliser ce modèle sur des profondeurs dépassant les 4000 mètres. En fait les ondes de Tsunamis sont de très grande longueur d'onde par rapport à la profondeur, ce qui justifie ce choix.

Le modèle de Saint-Venant est encore appelé "**équations shallow water**", parce qu'il peut aussi être construit à partir d'une hypothèse d'eau "peu profonde", mais cette construction particulière impose des hypothèses très réductrices, qui n'ont pas été faites ici.

4.3.2 Les équations d'Euler en hydrodynamique

On considère ici un gaz, de densité q et bien entendu de vitesse u , s'agissant d'un modèle physiquement réaliste. La pression est obtenue par la loi de Boyle Mariotte pour les gaz parfaits, en situation isentropique, et correspond à la **loi d'état**

$$P(q) = K q^\gamma ,$$

avec γ une constante, dite **constante adiabatique des gaz**. Elle est toujours supérieure à un : $\gamma > 1$. Pour l'atmosphère et des gaz comparables, on prend $\gamma = 1.4$, et quelquefois des valeurs plus proches de $\gamma = 1$ pour des gaz plus lourds. Le **nombre de mach** est défini par

$$M = \frac{|u|}{c(q)}$$

Pour $M < 1$ le régime est **subsonique** et pour $M > 1$ il est **supersonique**. Lorsque la pression est exprimée en *Pascal*, soit 10^{-5} bars, la valeur de la constante K est $K = 69259.5$, obtenue en écrivant que la densité au sol est de l'ordre de $q = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$. Bien souvent, dans les exemples utilisés pour les tests, ces unités sont modifiées pour avoir $K = 1$.

4.3.3 Un exemple académique

On considère le système suivant, qui n'a pas d'application particulière sauf dans quelques problèmes d'examen (universitaires...),

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial m}{\partial t} + 3v \frac{\partial m}{\partial x} + (q - 2v^2) \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 , \end{aligned}$$

avec

$$v = \frac{m}{q} .$$

Le paramètre q est supposé positif. Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4q} , \quad \lambda_2 = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4q} ,$$

et donc réelles et distinctes, d'où le système est bien strictement hyperbolique. De plus il est conservatif et vérifie la condition de flux nul puisque $m = vq$ est bien nul si $q = 0$. Cependant, en utilisant les notations

$$u = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} , \quad c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} ,$$

on obtient

$$u = \frac{3}{2} \frac{v}{q} = \frac{3}{2} \frac{m}{q} , \quad \frac{\partial c}{\partial m} = \frac{m}{2 q^2 \sqrt{v^2 + 4q}} .$$

La condition d'invariance par transformation galiléenne ($\frac{\partial c}{\partial m} = 0$) n'est pas vérifiée, et de fait le paramètre u est différent de $v = \frac{m}{q}$, c'est à dire que le flux m ne correspond pas à une quantité de mouvement, et finalement ce système n'est pas du tout physiquement réaliste.

4.3.4 Le trafic routier

On reprend l'exemple traité au niveau d'une équation d'onde, en section 2.3.3, au chapitre 2, c'est à dire l'équation de transport avec le flux $f(\phi) = \phi \text{Min}(v_M, g(\phi))$, où $g(\phi)$ est la vitesse maximale possible en fonction de la densité du trafic routier ϕ et v_M la vitesse maximale autorisée. On a vu que ce modèle n'était pas vraiment réaliste en l'appliquant au démarrage au feu vert, puisqu'il ne tient pas compte de l'inertie des véhicules et de certains conducteurs...

On introduit la vitesse réelle du trafic, noté v , toujours inférieure à $g_M(\phi) \equiv \text{Min}(v_M, g(\phi))$, puis la quantité

$$w = g_M(\phi) - v ,$$

qui exprime la **réserve de vitesse** du trafic ; il s'agit d'un paramètre qui reste toujours positif ou nul. Le comportement général des conducteurs consiste à chercher à réduire cette réserve de vitesse. Pendant une durée Δt , le conducteur "moyen" va passer d'une position $x(t)$ à une position $x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x$, avec $\Delta x = v\Delta t$, en cherchant à s'approcher le plus possible de la vitesse maximale $g_M(\phi)$. Ce comportement se traduit par la relation

$$w(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = w(x(t), t) - k w(x(t), t)^\gamma \Delta t + \Delta t \omega(\Delta t; w),$$

où $\omega(\Delta t; w)$ est un module de continuité, $k > 0$ et $\gamma \in]0, 1[$, les paramètres de l'action (freinage ou accélération) qui amène à réduire la réserve de vitesse. Cette relation conduit à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} = -k w^\gamma .$$

En posant $v = g_M(\phi) - w$, on obtient un système constitué d'une équation de transport

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0 ,$$

et de l'équation dynamique

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial v}{\partial x} = k (g_M(\phi) - v)^\gamma .$$

Ce système admet la matrice de flux

$$\begin{pmatrix} v & \phi \\ 0 & v + \phi g'_M(\phi) \end{pmatrix} ,$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = v + \phi g'_M(\phi) , \quad \lambda_2 = v ,$$

où $g'_M(\phi) < 0$ car g_M est décroissante. En introduisant le flux $m = \phi v$, on obtient le système hyperbolique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + (2v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial m}{\partial x} - v (v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial \phi}{\partial x} = k \phi \left(g_M(\phi) - \frac{m}{\phi} \right) .$$

On obtient ensuite

$$u = \frac{m}{\phi} + \frac{1}{2} \phi g'_M(\phi) \quad , \quad c = \frac{1}{2} \phi g'_M(\phi) \quad ,$$

pour remarquer que

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 \quad ,$$

et que le système est invariant par transformation galiléenne et satisfait à la condition de flux nul ($m = v\phi$). Pour $\phi \leq \phi_0$ avec ϕ_0 telle que $v_M = g(\phi_0)$, on a $g'_M(\phi) = 0$, donc $u = \frac{m}{\phi}$, d'où d'après le théorème précédent, le système est conservatif (pour $\phi \leq \phi_0$) et physiquement réaliste. Ce n'est plus le cas lorsque $\phi > \phi_0$, c'est à dire lorsque le trafic commence à se densifier sérieusement, en l'occurrence le cas pour lequel la modélisation peut apporter quelque chose d'utile.

4.3.5 A propos des équations d'ondes (scalaires)

On considère l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 \quad ,$$

en introduisant un nouveau paramètre $z(x, t) = x$. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad ,$$

et comme $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, l'équation en ϕ peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad ,$$

et on a ainsi écrit un système de deux équations dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} f'(\phi) & S(\phi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

de valeurs propres *zéro* et $f'(\phi)$. Cette opération amène à constater qu'une équation d'onde non homogène peut être transformée en un système hyperbolique homogène, dont les vitesses caractéristiques sont zéro et celle de l'équation d'onde. Ainsi, un terme source dans une équation induit toujours la vitesse caractéristique "zéro".

On peut aussi reprendre l'équation d'onde, et la mettre sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi) \left(\frac{f'(\phi)}{S(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 1 \right) = 0 \quad .$$

On introduit ensuite une fonction θ telle $\theta'(\phi) = \frac{f'(\phi)}{S(\phi)}$ puis on pose $w = \theta(\phi) + x$. Alors w vérifie

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 1 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \theta'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\theta'(\phi) S(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = -f'(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

On a obtenu le système hyperbolique homogène

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ,$$

dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} 0 & S(\phi) \\ 0 & f'(\phi) \end{pmatrix} \quad .$$

Les valeurs propres en sont encore $f'(\phi)$ et *zéro*. On retrouve cette valeur propre nulle due au terme source.

Une autre opération plus fantaisiste consiste à introduire un paramètre q tel que

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad ,$$

et de reprendre l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 \quad .$$

On obtient un autre système hyperbolique dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & f'(\phi) \end{pmatrix} \quad ,$$

avec toujours les mêmes valeurs propres $f'(\phi)$ et *zéro*. Cette fois ci le système n'est pas devenu homogène, mais on a retrouver la forme des systèmes dont la première équation est une équation de transport, pour la densité q ici, par le flux $m = \phi$. On obtient

$$u = \frac{1}{2} f'(\phi) \quad , \quad c = \frac{1}{2} |f'(\phi)| \quad , \quad (c = |u|)$$

et donc $\frac{\partial c}{\partial m} \neq 0$. Ce système est conservatif, mais n'est pas invariant par transformation galiléenne et ne respecte pas la condition de flux nul. Il n'est donc pas physiquement réaliste.

Ces différentes manipulations de l'équation d'onde scalaire semblent a priori un peu fantaisistes. Elles peuvent apporter cependant de nouvelles formulations pour lesquelles les conditions de stabilité ou de convergence sont parfois très fortement favorisées et améliorées, lors de traitements numériques des équations notamment.

4.4 Les systèmes physiquement réalistes à trois ondes

Reprenons l'expression générale d'un système physiquement réaliste utilisant l'équation de transport :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (qu) = 0 \quad ,$$

et l'équation dynamique

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + S(q, m) = 0 \quad ,$$

avec $P'(q) = c^2(q)$ et $u = \frac{m}{q}$.

On calcule l'évolution du terme de pression entre une position $x(t)$ à l'instant t et une position $x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x$ à un instant ultérieur $t + \Delta t$, avec $\Delta x = u\Delta t$. On obtient au second ordre près :

$$\frac{1}{\Delta t} (P(x(t + \Delta t), t) - P(x(t), t)) = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} = c(q)^2 \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -q c(q)^2 \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

ce qui constitue une troisième équation, appelée **équation de pression** :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + q c(q)^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Le système des trois équations de transport, dynamique et de pression sera appelé **système physiquement réaliste d'ordre 3**. Exprimé en utilisant les variables q, u, P , il admet pour matrice de flux

$$\begin{pmatrix} u & q & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{q} \\ 0 & q c(q)^2 & u \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $(u - \lambda) ((u - \lambda)^2 - c(q)^2)$ d'où les trois valeurs propres, indicées en ordre croissant,

$$\lambda_1 = u - c \quad , \quad \lambda_2 = u \quad , \quad \lambda_3 = u + c \quad .$$

Remarquons que nous n'avons absolument pas ajouté une équation supplémentaire, mais seulement transformé une loi d'état "algébrique" en une nouvelle équation d'onde.

On a $\nabla \lambda_1 = (-c'(q), 1, 0)$ et le vecteur propre associé $R_1 = (q, -c(q), qc(q)^2)$ d'où

$$\nabla \lambda_1 . R_1 = -qc'(q) - c(q) \quad ,$$

et on obtient que sauf dans le cas où $q c(q) = \text{Constante}$, la valeur propre λ_1 correspond à une onde vraiment non linéaire.

De façon analogue pour λ_3 , on a $\nabla \lambda_3 = (c'(q), 1, 0)$ et $R_3 = (q, c(q), qc(q)^2)$, d'où

$$\nabla \lambda_3 . R_3 = qc'(q) + c(q) \quad ,$$

et on obtient encore que sauf dans le cas où $q c(q) = \text{Constante}$, la valeur propre λ_3 correspond à une onde vraiment non linéaire.

La valeur propre λ_2 se comporte différemment : $\nabla \lambda_2 = (0, 1, 0)$ et $R_2 = (1, 0, 0)$ si bien que

$$\nabla \lambda_2 . R_2 = 0 \quad ,$$

et l'onde correspondante est linéairement dégénérée ; elle peut être discontinue et représenter un choc qui se déplace à la vitesse u . Cette onde est appelée une **discontinuité de contact**, et s'agissant d'un lieu où les caractéristiques ne se rencontrent pas, et ne divergent pas non plus, on a nécessairement la même valeur de u de part et d'autre de la discontinuité de contact. Ensuite, en reprenant le résultat du théorème 2.5.4, le champ (m, F) étant un champ conservatif, on établit que la pression est également continue le long de cette discontinuité. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 4.4.1 *Pour un système physiquement réaliste d'ordre 3, la vitesse et la pression restent continues le long des discontinuités de contact. Seule la densité q est discontinue.*

Remarque 4.4.2 *Le produit $qc(q)$ est appelé **impédance acoustique**. Il s'agit en général d'une fonction strictement croissante de q , ce qui évite l'apparition d'ondes linéairement dégénérées de vitesses $\lambda_1 = u - c$ ou $\lambda_3 = u + c$.*

En fait, sans rien avoir ajouté, seulement transformé une loi d'état en une nouvelle équation, nous avons "relaxé" le modèle, en autorisant des discontinuités sur la densité qui n'étaient pas possibles dans la version d'ordre deux. Une loi d'état "algébrique" peut ainsi être transformée en une équation supplémentaire, en créant donc une onde supplémentaire.

4.4.1 Application à l'hydrodynamique

L'équation de transport et l'équation dynamique conservent les mêmes expressions. L'équation de pression peut être précisée. En effet, puisque $P = Kq^\gamma$, avec K constant, on a

$$q \, c(q)^2 = q \, \frac{dP}{dq} = \gamma K q^\gamma = \gamma P ,$$

d'où une nouvelle écriture de l'équation de pression :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

On constate qu'il ne reste plus qu'une seule information provenant de la loi d'état, c'est la constante adiabatique γ . On peut donc envisager la prise en compte de lois d'état plus générales, par exemple la loi de Boyle-Marriotte

$$P = (\gamma - 1) q I ,$$

où I est appelée l'**énergie interne** (par unité de masse), que l'on peut assimiler à la température absolue, en degrés Kelvin, à une constante multiplicative près. On peut maintenant en déduire une équation sur la variable qI , c'est à dire l'énergie interne par unité de volume. Il suffit en effet de diviser l'équation de pression par $\gamma - 1$. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (qI) + u \frac{\partial}{\partial x} (qI) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

On considère maintenant l'**énergie cinétique** $\frac{1}{2} q u^2$, dont on recherche l'équation d'évolution, comme on l'a fait pour obtenir l'équation de pression. On calcule

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(q \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(q \frac{u^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} \right) + qu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - q \frac{u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} ,$$

en utilisant l'équation de transport et l'équation dynamique. On l'ajoute à l'équation précédente, pour obtenir, en posant

$$E = q \left(\frac{u^2}{2} + I \right) ,$$

qui représente l'**énergie totale**, l'équation suivante,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + q \frac{u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

En remarquant que $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} + 1$, donc $\frac{\gamma}{\gamma-1}P = qI + P$, on obtient

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

et finalement, en regroupant les termes, on arrive à l'**équation de conservation de l'énergie totale**

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(E+P)) = 0 .$$

Le champ $(E, u(E+P))$ est un champ conservatif, et on a établi le résultat suivant :

Théorème 4.4.3 *Un système physiquement réaliste d'ordre 3 est conservatif et assure la conservation de l'énergie totale.*

Comme on l'a remarqué plusieurs fois, la relaxation qui a consisté à remplacer la loi d'état par une nouvelle équation a permis d'assurer la conservation de l'énergie totale, ce qui n'était pas le cas a priori pour le système de deux équations. On a ensuite "oublié" cette loi d'état, qu'il convient donc de rajouter à la donnée des trois équations. Le résultat précédent est général, et s'applique même en dehors de l'hydrodynamique.

4.4.2 Application à l'hydraulique

En notant q la hauteur d'eau et u la vitesse, on a établi le modèle de Saint-Venant en Section 3.3.1, c'est à dire l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (qu) = 0 ,$$

et l'équation dynamique

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + gq \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

En faisant un rapprochement avec la démarche précédente en hydrodynamique, on est amené à définir une pression

$$P(q) = g \frac{q^2}{2} ,$$

et une énergie interne

$$I = g \frac{q}{2} ,$$

qu'on peut interpréter comme une **énergie potentielle**, de façon à avoir

$$P = (\gamma - 1) q I ,$$

avec nécessairement $\gamma = 2$, donc plus simplement $P = qI$.

On remarque qu'une équation pour I s'obtient immédiatement en multipliant l'équation de transport par la constante $\frac{g}{2}$:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Iu) = 0 .$$

Tout se passe comme si on écrivait deux fois la première équation, et pourtant, on va obtenir une relaxation du système, comme pour l'étude précédente, par une équation de pression :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + 2 P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

L'équation de conservation d'énergie s'en déduit de la même façon :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(E + P)) = 0 ,$$

avec $E = q \frac{u^2}{2} + P = q \left(\frac{u^2}{2} + I \right)$. Cette formulation à l'ordre 3 est quelquefois très utile pour construire la solution explicite dans certains cas, par exemple pour obtenir un ressaut hydraulique en amont d'un pont en charge sur une rivière en crue. Ce ressaut, qui est une discontinuité de contact, le plus souvent stationnaire, se voit réellement sur la rivière, mais ne peut pas être calculé par le modèle de Saint-Venant à deux équations.

4.5 Résolution des systèmes hyperboliques homogènes

On s'intéresse d'abord aux systèmes physiquement réalistes homogènes de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c(q)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad ,$$

où

$$u = \frac{m}{q} \quad , \quad c(q) > 0 \quad .$$

On cherche à expliciter le profil des ondes, bien entendu en dehors du cas trivial où ce profil est complètement plat. On suppose a priori que $\frac{\partial q}{\partial t}$ ou $\frac{\partial q}{\partial x}$ est non nul. Dans un premier temps, on cherche à revenir à deux équations scalaires non couplées, ce qui n'est pas toujours possible dans les cas non linéaires, mais on va se rendre compte qu'on pourra réduire suffisamment ce couplage pour parvenir à nos fins. Le système étant d'ordre deux, avec deux ondes vraiment non linéaires, on s'attend à deux types d'ondes : des ondes régulières aussi appelées **détentes** ou **ondes de raréfaction**, et des **ondes de choc**. On commence par la recherche d'ondes de raréfaction.

4.5.1 Le découplage

On propose de représenter par q le profil de l'onde de raréfaction, en écrivant que le profil en m va s'en déduire par une relation de la forme

$$m = m(q) \quad .$$

On cherche à expliciter cette fonction $m(q)$. En reportant dans les deux équations du système, on obtient deux équations d'ondes, portant toutes les deux sur le profil q :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m'(q) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad , \quad m'(q) \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} \right) + (c(q)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad .$$

Ces deux équations peuvent aussi s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & m'(q) \\ m'(q) & 2u m'(q) + c(q)^2 - u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a fait l'hypothèse a priori que soit $\frac{\partial q}{\partial t}$, soit $\frac{\partial q}{\partial x}$ est non nul, et il faut donc que la matrice ci dessus soit singulière (déterminant nul) ce qui se traduit par

$$2 u m'(q) + c(q)^2 - u^2 - m'(q)^2 = 0 \quad ,$$

ou encore

$$(m'(q) - u)^2 = c(q)^2 \quad ,$$

que l'on scinde en deux équations :

$$m'(q) = u - c(q) \quad \text{ou} \quad m'(q) = u + c(q) \quad ,$$

chacune correspondant à une onde, la première de vitesse $\lambda_1 = u - c(q)$ et la seconde de vitesse $\lambda_2 = u + c(q)$.

On considère d'abord la première équation où on remplace u par $\frac{m(q)}{q}$, pour obtenir l'équation différentielle

$$m'(q) - \frac{m(q)}{q} = -c(q) \quad .$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$m(q) = A q \quad ,$$

où A est une constante, puis par la méthode de variation de cette constante, on obtient

$$A'(q) = - \frac{c(q)}{q} \quad .$$

On introduit la quantité

$$H(q) = \int_{q_0}^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta \quad ,$$

pour une valeur de référence q_0 fixe (par exemple $q_0 = 0$, mais il peut être plus intéressant d'en choisir une autre selon les cas particuliers des applications). On obtient

$$A(q) = R - H(q) \quad ,$$

où R est une constante, puis

$$m(q) = q (R - H(q)) \quad \text{ou} \quad u(q) = R - H(q) \quad .$$

Dans l'autre cas, pour l'onde de vitesse $\lambda_2 = u + c$, on obtiendra

$$u(q) = Q + H(q) ,$$

où Q est une autre constante d'intégration.

On a finalement obtenu deux équations d'ondes,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (R - H(q) - c(q)) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

de vitesse caractéristique $\lambda_1 = u - c$, et

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (Q + H(q) + c(q)) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

de vitesse $\lambda_2 = u + c$.

Ces deux ondes sont vraiment non linéaires, bien entendu, et dans chaque cas, on en déduit $m(q)$ par les relations

$$m(q) = q (R - H(q)) \quad \text{et} \quad m(q) = q (Q + H(q)) ,$$

respectivement. Cependant on ne dispose pas encore d'éléments pour déterminer les constantes R et Q , ce qui réduit la portée de cette première partie de l'étude, pour le moment.

4.5.2 Les invariants de Riemann

La question qui se pose maintenant est celle de la détermination des constantes R et Q . Paradoxalement, on va commencer par oublier qu'il s'agit de constantes, et les interpréter comme des fonctions de q et m . Ainsi, on considère les deux expressions

$$R(q, m) = \frac{m}{q} + H(q) , \quad Q(q, m) = \frac{m}{q} - H(q) ,$$

toujours avec

$$H(q) = \int_{q_0}^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta .$$

On commence par étudier la quantité $R(q, m)$. On calcule

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial m}{\partial t} + \left(\frac{c(q)}{q} - \frac{m}{q^2} \right) \frac{\partial q}{\partial t} = - \left(\frac{c(q)}{q} + \frac{m}{q^2} \right) \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{u^2 - c(q)^2}{q} \frac{\partial q}{\partial x} ,$$

et

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{q} \frac{\partial m}{\partial x} + \left(\frac{c(q)}{q} - \frac{m}{q^2} \right) \frac{\partial q}{\partial x} ,$$

puis on évalue $\frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x}$, pour trouver tout simplement

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x} = 0 .$$

On a établi que R vérifie une équation d'onde homogène de vitesse caractéristique $\lambda_2 = u + c$, bien qu'il ait été obtenu à partir d'une équation d'onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$, ce qui peut sembler surprenant au premier abord. En fait, cette quantité R , portée par une caractéristique de vitesse $\lambda_2 = u + c$, va traverser toutes les caractéristiques de vitesse $\lambda_1 = u - c$, et apporter la valeur de la constante R qui nous manquait dans l'étude précédente pour résoudre l'équation d'onde

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (R - H(q) - c(q)) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

de vitesse caractéristique $\lambda_1 = u - c$.

De la même façon, la quantité $Q(q, m)$ est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 .$$

Cette quantité Q , portée par une caractéristique de vitesse $\lambda_1 = u - c$, va traverser toutes les caractéristiques de vitesse $\lambda_2 = u + c$, et apporter la valeur de la constante Q qui nous manquait dans l'étude précédente pour résoudre l'équation d'onde

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (Q + H(q) + c(q)) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

de vitesse $\lambda_2 = u + c$.

La connaissance de R et Q va ainsi permettre de calculer explicitement des solutions régulières.

Définition 4.5.1 *Les quantités R et Q définies par*

$$R = \frac{m}{q} + H(q) , \quad Q = \frac{m}{q} - H(q)$$

sont appelés les invariants de Riemann associés au système

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 , \quad \text{avec } H'(q) = \frac{c(q)}{q} .$$

Rappelons que l'invariant R est déplacé à la vitesse $\lambda_2 = u + c$ pour imposer la valeur de la constante intervenant dans l'onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$, et de façon analogue, l'invariant Q est déplacé à la vitesse $\lambda_1 = u - c$ pour imposer la valeur de la constante intervenant dans l'onde de vitesse $\lambda_2 = u + c$.

4.5.3 Un exemple : la rupture d'un barrage sur un fond plat

On reprend les équations de Saint-Venant, où q correspond à la profondeur de l'eau, et m au débit, puis $u = \frac{m}{q}$ à la vitesse. On a

$$H(q) = \int_0^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta = 2\sqrt{gq} = 2c(q) ,$$

et les invariants sont

$$R = \frac{m}{q} + H(q) = u + 2c(q) , \quad Q = \frac{m}{q} - H(q) = u - 2c(q) .$$

On suppose que les états avant la rupture du barrage sont les suivants : le sol est plat et la friction est nulle, d'où $S(q, m) = 0$, la hauteur d'eau dans la retenue est H_0 , en amont du barrage, et le sol est sec en aval du barrage. On note par $x = 0$ la position du barrage. La donnée initiale est ainsi la suivante

$$q(x, 0) = \begin{cases} H_0 & \text{si } x < 0 \quad (\text{amont}) \\ 0 & \text{si } x > 0 \quad (\text{aval}) \end{cases} .$$

L'eau est initialement au repos :

$$u(x, 0) = 0 .$$

La rupture a lieu à l'instant $t = 0$, et on s'attend à voir une onde de vidange remonter la retenue, pour alimenter une onde qui se propage vers l'aval. Cette onde de vidange est de vitesse $\lambda_1 = u - c$, parce que sa vitesse est négative, avec $u = 0$ au départ, et sa première caractéristique est de vitesse $-\sqrt{gH_0}$, car à ce niveau, $u = 0$ et $q = H_0$.

On a R constant, donc $u = R - 2c(q)$, et $\lambda_1 = u - c = R - 3c$. Par ailleurs, comme $m'(q)$ est une solution de l'équation de Burgers issue de $x = 0$ en $t = 0$ (voir Section 2.3.4), on a nécessairement

$$m'(q) = \frac{x}{t} \quad (= R - 3c(q)) .$$

On en déduit

$$q = \frac{1}{9g} \left(R - \frac{x}{t} \right)^2 .$$

Sachant R constant, on obtient sa valeur en faisant $q = H_0$ et $x = -t\sqrt{gH_0}$. On obtient

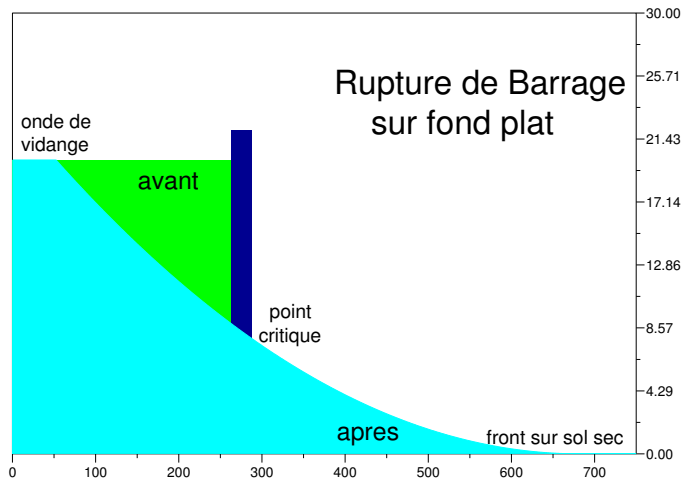
$$R = 2\sqrt{gH_0} .$$

Par ailleurs, on a $q = 0$ lorsque $q = Rt = 2t\sqrt{gH_0}$ qui exprime que la première goutte d'eau avance à la vitesse $2\sqrt{gH_0}$. On obtient le profil suivant

$$q(x, t) = \begin{cases} H_0 & \text{si } x < -t\sqrt{gH_0} \\ \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gH_0} - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } -t\sqrt{gH_0} \leq x \leq 2t\sqrt{gH_0} \\ 0 & \text{si } x > 2t\sqrt{gH_0} \end{cases}$$

et on observe qu'au niveau du barrage, la hauteur de l'inondation se limite à

$$q_* = \frac{4}{9}H_0 .$$



La figure précédente montre la rupture d'un barrage dont la retenue est profonde de 20 mètres. On a $\sqrt{gH_0} \simeq 14 \text{ m s}^{-1}$ et l'onde frontale se déplace à la vitesse $2\sqrt{gH_0} \simeq 28 \text{ m s}^{-1}$, soit environ 100 km h^{-1} . La hauteur maximale est atteinte au passage du barrage, et vaut $q_* = 8.888 \text{ m}$. Cette étude sommaire apporte deux informations utiles : la vitesse du front et la hauteur maximale de la vague, qui peuvent être utiles pour la conception d'un plan d'évacuation des populations situées dans la zone de danger, ou d'un plan d'occupation des sols, pour délivrer des permis de construire. L'hypothèse de sol plat est cependant peu réaliste, les barrages se trouvant en général dans les zones de montagne. De plus la zone en aval n'est pas sèche en général, il y coule une rivière, et nous le verrons dans le paragraphe suivant, le profil de la vague est très différent. La présente étude n'est pas inutile pour autant, car elle apporte des informations dites "majorantes", qui signifie que les risques restent en deçà de ces chiffres : l'eau n'ira ni plus haut, ni plus vite.

4.6 Les ondes de choc

4.6.1 L'exploitation des relations de Rankine-Hugoniot

On considère un système physiquement réaliste, dont la solution comporte une discontinuité, c'est à dire un choc. On repère par l'indice "2" les données à droite de ce choc, et par l'indice "1" les données à gauche de ce même choc. La trajectoire du choc est représentée par une courbe d'équation

$x = x(t)$ dans le plan physique. L'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

impose la relation de Rankine Hugoniot

$$x'(t) (q_2 - q_1) = m_2 - m_1 .$$

L'équation dynamique admet la forme conservative

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S(q, m) = 0 \quad , \quad \text{avec } F(q, m) = \frac{m^2}{q} + P(q)$$

qui impose de son côté la relation de Rankine -Hugoniot

$$x'(t) (m_2 - m_1) = F_2 - F_1 .$$

S'agissant de la même trajectoire de choc, ces deux relations induisent la relation de compatibilité

$$(q_2 - q_1) (F_2 - F_1) = (m_2 - m_1)^2$$

qui se développe, compte tenu de l'expression de F en

$$q_2^2 u_2^2 - q_1 q_2 (u_1^2 + u_2^2) + q_1^2 u_1^2 + (P_2 - P_1) (q_2 - q_1) = q_2^2 u_2^2 - 2q_1 q_2 u_1 u_2 + q_1^2 u_1^2$$

dont il ne reste que

$$q_1 q_2 (u_2 - u_1)^2 = (P_2 - P_1) (q_2 - q_1)$$

après simplifications.

Or $P(q)$ est une fonction croissante de q (on a $P'(q) = c(q)^2$), ce qui permet d'introduire

$$Z(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{1}{q_1 q_2} \frac{P_2 - P_1}{q_2 - q_1}} ,$$

qui correspond à une approximation du rapport

$$\frac{H(q_2) - H(q_1)}{q_2 - q_1} ,$$

de façon à obtenir deux cas possibles, appelées **conditions de compatibilité** :

$$u_2 - u_1 = Z(q_1, q_2) (q_2 - q_1)$$

et

$$u_2 - u_1 = -Z(q_1, q_2) (q_2 - q_1) .$$

Notons que $Z(q_1, q_2) = Z(q_2, q_1)$, cette expression est symétrique. On obtient les deux vitesses de choc en partant de :

$$x'(t) = \frac{m_2 - m_1}{q_2 - q_1} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{q_2 + q_1}{2} \frac{u_2 - u_1}{q_2 - q_1}$$

c'est à dire

$$x'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} - Z(q_1, q_2) \frac{q_2 + q_1}{2} \simeq u - c$$

ou

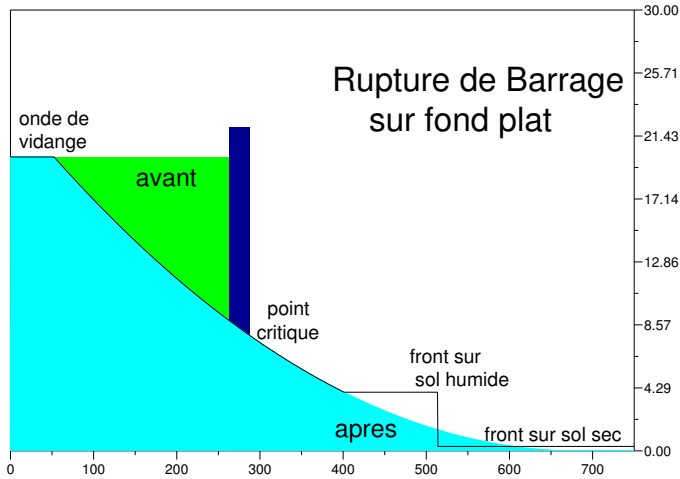
$$x'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} + Z(q_1, q_2) \frac{q_2 + q_1}{2} \simeq u + c .$$

On retient le résultat suivant.

Proposition 4.6.1 *Pour un choc de vitesse $u - c$, les sauts $\Delta u = u_2 - u_1$ et $\Delta q = q_2 - q_1$ sont de signes contraires. Pour un choc de vitesse $u + c$, ces sauts Δu et Δq sont de mêmes signes. De plus le produit $\Delta u \Delta q$ n'est jamais nul sur un choc.*

4.6.2 Retour à la rupture de barrage

On reprend l'exemple de la rupture d'un barrage sur fond plat, avec les mêmes notations, mais en supposant que le sol n'est pas sec en aval, et qu'une petite hauteur d'eau résiduelle h_0 y est présente, et de vitesse nulle.



D'après la proposition précédente, il n'est pas possible d'envisager une onde continue consistant à raccorder le profil de l'onde de vidange avec le nouveau profil en aval $q = h_0$. Il y aurait en effet une discontinuité de la vitesse u , donc $\Delta u \neq 0$, ce qui implique une discontinuité sur q , c'est à dire $\Delta q \neq 0$. Il y a donc nécessairement un choc qui précède l'onde de vidange, et il devra être de vitesse

$u + c$. Le raccordement entre cette onde de choc et l'onde de vidange que nous connaissons déjà se fera par un état intermédiaire constant que l'on note (q_*, m_*) et on pose $u_* = \frac{m_*}{q_*}$, comme dans la figure ci contre. On commence par déterminer cet état constant. Il réalise une valeur possible de l'onde de vidange, donc

$$u_* + 2c_* = R = 2\sqrt{gH_0}$$

en notant $c_* = \sqrt{gq_*}$, et on doit aussi pouvoir le connecter à l'état en aval $q_2 = h_0$, $u_2 = 0$ par une onde de choc de vitesse $u + c$, d'où, en utilisant le coefficient $Z(q_1, q_2)$ introduit plus haut, et qui se réduit ici à :

$$Z(q_1, q_2) = \sqrt{g \frac{q_1 + q_2}{2q_1 q_2}},$$

on obtient

$$u_* = Z(q_*, h_0) (q_* - h_0) \quad .$$

On vient d'écrire un système de deux équations liant u_* et q_* , et il est immédiat d'éliminer u_* pour obtenir une seule équation pour q_* , qui s'écrit

$$Z(q_*, h_0) (q_* - h_0) = 2\sqrt{gH_0} - 2\sqrt{gq_*} \quad .$$

On pose

$$K(q) = Z(q, h_0) (q - h_0) - 2\sqrt{gH_0} + 2\sqrt{gq} \quad ,$$

et on cherche q_* racine de $K(q)$ comprise entre h_0 et H_0 . On remarque que pour $q = H_0$, on a $K(H_0) = Z(H_0, h_0) (H_0 - h_0) > 0$, et pour $q = h_0$, on a $K(h_0) = 2\sqrt{gh_0} - 2\sqrt{gH_0} < 0$ d'où l'existence d'une racine q_* (unique, on vérifie que K est décroissante strictement) située entre h_0 et H_0 , qui peut être obtenus aisément par un procédé de dichotomie.

Dans l'exemple présenté ci-dessus, on a pris $H_0 = 20$ mètres et $h_0 = 0.3$ mètre. On obtient $q_* \simeq 4$ mètres, et une vitesse du front de vague, ici le choc, égale à 15.5 ms^{-1} , soit 55.7 km/heure . On constate que par rapport au sol sec, la vitesse du front de vague a fortement diminué, passant de 100 à 60 km/heure, ce qui laisse plus de temps pour l'évacuation des populations. Par contre la hauteur d'eau augmente instantanément, et non plus progressivement, pour atteindre 4 m. La vitesse atteint la valeur de 16.7 ms^{-1} soit 60 km/heure , ce qui est très important et peut provoquer de nombreux dégâts dûs à la surprise d'éventuelles victimes et à la quantité d'énergie apportée.

Une erreur classique...

Elle consiste à reprendre l'équation dynamique du système de Saint-Venant, sur un sol plat,

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0,$$

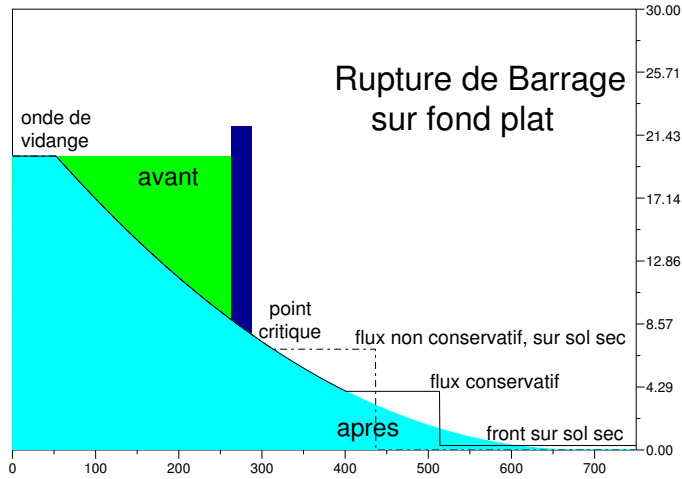
et à simplifier par q . Il reste l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad ,$$

qui peut s'interpréter comme une loi de conservation. On a en effet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + gq \right) = 0 \quad ,$$

qui exprime que le champ $(u, \frac{1}{2}u^2 + gq)$ est un champ conservatif. On peut donc aussi en extraire une relation de Rankine Hugoniot qui, combinée avec celle obtenue à partir de l'équation de conservation de la masse, donne une condition de compatibilité **différente** de la précédente. Les chocs se propagent à des vitesses différentes, et surtout cette interprétation autorise des chocs (compatibles avec la condition d'entropie!) sur un sol sec, au lieu de la solution régulière qui a été construite précédemment, comme le montre la figure ci-contre.



La hauteur de la vague frontale est égale à

$$\left(\frac{2}{3 + 2\sqrt{2}} \right) H_0$$

et sa vitesse est

$$\sqrt{\frac{4 g H_0}{3 + 2\sqrt{2}}}.$$

Dans notre exemple, cette hauteur est égale à 6.863 *mètres* et la vitesse est égale à 11.6 $m s^{-1}$, soit 41.77 *km/heure*. Pour l'onde régulière, la hauteur de vague augmentait progressivement à partir du sol, avec une vitesse égale à $2\sqrt{gH_0}$, soit 28 $m s^{-1}$ ou 100.85 *km/heure*, ce qui constitue des résultats très différents, dont l'interprétation peut être erronée, avec des conséquences très graves si par exemple le modèle en (q, u) était utilisé pour prévoir un plan d'évacuation des populations.

Sur le plan strictement mathématique, on retrouve les problèmes posés par la multiplication des impulsions, et surtout on dispose d'un exemple de **non-unicité** de la solution dans le dernier

cas (en (q, u)). Ce problème ne peut pas apparaître dans le cas conventionnel (en $(q, m = qu)$) car un choc sur sol sec est impossible à réaliser, le facteur $Z(q_1, q_2)$ devenant infinie.

4.6.3 Choc ou onde de raréfaction ?

On considère un système physiquement réaliste homogène

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad ,$$

dont l'impédance acoustique $q c(q)$ est une fonction strictement croissante de q . On s'intéresse à une onde de raréfaction de vitesse $\lambda_1 = u - c$. D'après le paragraphe 3.5.1, en utilisant l'invariant de Riemann $R = u + H(q)$, cette onde est représentée par l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (R - H(q) - c(q)) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad ,$$

où la vitesse $R - H(q) - c(q)$ peut s'interpréter comme la dérivée d'un flux $f(q)$. On sait que la possibilité d'une onde de raréfaction est liée à la convexité ou à la concavité de ce flux. On calcule donc

$$f''(q) = -H'(q) - c'(q) = -\frac{1}{q} \frac{d}{dq} (qc(q)) < 0 \quad ,$$

en utilisant l'hypothèse d'impédance acoustique strictement croissante. On note que le flux est **concave**, et on en déduit qu'une onde de raréfaction doit être décroissante, et donc seuls des chocs croissants sont autorisés (Proposition 2.5.8).

De la même façon, pour une onde de raréfaction de vitesse $\lambda_2 = u + c$, la vitesse s'écrit $Q + H(q) + c(q)$ et le flux correspondant est tel que

$$f''(q) = H'(q) + c'(q) = \frac{1}{q} \frac{d}{dq} (qc(q)) > 0 \quad ,$$

d'après l'hypothèse de croissance de l'impédance acoustique. Ce flux est **convexe** et une onde de raréfaction doit être croissante, et donc que seuls des chocs décroissants sont autorisés (Proposition 2.5.8). On a établi le résultat suivant.

Théorème 4.6.2 *Pour un système physiquement réaliste, homogène, d'impédance acoustique strictement croissante, les ondes de raréfaction de vitesse $\lambda_1 = u - c$ sont toujours décroissantes et les ondes de raréfaction de vitesse $\lambda_2 = u + c$ sont toujours croissantes. De plus les ondes de choc de vitesse $\lambda_1 = u - c$ sont toujours croissantes et les ondes de choc de vitesse $\lambda_2 = u + c$ sont toujours décroissantes.*

Remarque 4.6.3 *Le résultat du théorème précédent sur les chocs reste vrai dans le cas non homogène. En ce qui concerne les ondes de raréfaction, la présence du terme source modifie complètement la situation, les invariants de Riemann n'étant plus des constantes (et, évidemment, on ne doit plus les appeler des invariants!).*

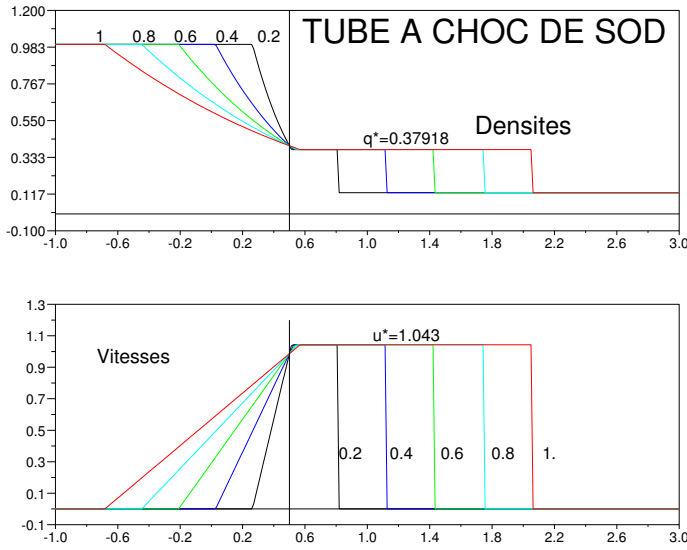
4.6.4 Le tube à choc de Sod

Il s'agit d'un cas test académique utilisé par les ingénieurs en calcul scientifique pour valider et évaluer la qualité des schémas numériques adaptés aux équations de l'hydrodynamique :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{q} + P(q) \right) = 0 \quad ,$$

avec $P(q) = q^\gamma$, $\gamma = 1.4$, donc $c(q) = \sqrt{q} q^{\frac{\gamma-1}{2}}$, et les données initiales

$$q(x, 0) = \begin{cases} 1 & (= q_g) \quad \text{si } x < x_0 \\ 0.125 & (= q_d) \quad \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad , \quad u(x, 0) = 0 \quad .$$



Le point x_0 correspond à la position d'une membrane séparant deux zones, l'une de haute pression à gauche, et l'autre de basse pression à droite. Dans chacune des deux zones le gaz est initialement au repos (vitesse nulle). On provoque une rupture de la membrane, et on doit observer une onde de choc qui progresse dans la zone de basse pression $\{x > x_0\}$ avec une vitesse positive, et une onde de raréfaction qui remonte la zone de haute pression $\{x < x_0\}$ avec une vitesse négative. Entre ces deux ondes s'établit un état intermédiaire constant (q^*, u^*) que nous allons évaluer, en fonction des données q_g et q_d .

L'onde de raréfaction est décrite par l'invariant de Riemann

$$R = u + H(q)$$

où

$$H(q) = \int_0^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta = \sqrt{\gamma} \int_0^q \theta^{\frac{\gamma-3}{2}} d\theta = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} q^{\frac{\gamma-1}{2}} .$$

La connexion avec l'état initial $q = q_g$, $u = 0$ impose

$$R = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}$$

d'où

$$u = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(q_g^{\frac{\gamma-1}{2}} - q^{\frac{\gamma-1}{2}} \right)$$

au niveau de l'onde de raréfaction. Comme l'état intermédiaire (q^*, u^*) est réalisé à l'extrémité de l'onde, on a nécessairement :

$$u^* = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(q_g^{\frac{\gamma-1}{2}} - q^{*\frac{\gamma-1}{2}} \right) .$$

De l'autre côté, au niveau du choc, on écrit la relation de Rankine Hugoniot liant l'état intermédiaire (q^*, u^*) à l'état dans la zone de basse pression $(q_d, 0)$, c'est à dire

$$u^* = Z(q^*, q_d)(q^* - q_d)$$

avec

$$Z(q^*, q_d) = \sqrt{\frac{1}{q^* q_d} \frac{q^{*\gamma} - q_d^\gamma}{q^* - q_d}} .$$

Ces deux dernières équations caractérisent l'état intermédiaire. En posant

$$\Phi(q) = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(q_g^{\frac{\gamma-1}{2}} - q^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) - Z(q, q_d)(q - q_d) ,$$

on remarque que Φ est une fonction continue, décroissante de q sur l'intervalle $[q_d, q_g]$ et vérifie $\Phi(q_g) < 0$, $\Phi(q_d) > 0$, et il existe bien une valeur intermédiaire q^* telle que $\Phi(q^*) = 0$. On obtient ensuite la valeur de u^* par l'une ou l'autre des équations. Pour calculer effectivement la valeur de q^* une méthode de dichotomie est parfaitement adaptée. La vitesse du choc est obtenue par une relation de Rankine Hugoniot, par exemple

$$x'(t) = \frac{q^* u^*}{q^* - q_d} .$$

On obtient enfin les valeurs explicites de l'onde de détente en utilisant la technique des caractéristiques, qui assure que la vitesse d'onde (ici $u - c$) est solution de l'équation de Burgers dans le cas homogène, ce qui se traduit ici par

$$u - c = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(q_g^{\frac{\gamma-1}{2}} - q^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) - \sqrt{\gamma} q^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{x - x_0}{t} ,$$

d'où

$$q(x, t) = \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}(\gamma + 1)} \left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} - \frac{x - x_0}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

pour

$$-c(q_g) \leq \frac{x - x_0}{t} \leq u^* - c(q^*) .$$

Dans l'exemple du tube à choc de Sod, c'est à dire pour $q_g = 1$, $q_d = 0.125$, on obtient $u^* = 1.043$, $q^* = 0.37918$ et la vitesse de choc $x'(t) = 1.556$. Au niveau de l'état intermédiaire on note que la vitesse du son est $c(q^*) = 0.974615$, légèrement inférieure à la vitesse u^* , ce régime est donc supersonique, le nombre de Mach valant 1.07. La figure précédente montre les courbes de densité et de vitesse pour cinq valeurs du temps $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ et 1. Le caractère supersonique se traduit par un léger débordement de l'onde de raréfaction dans la zone $\{x > x_0\}$.

4.6.5 Courbes de chocs et invariants

On reste dans le cadre d'un système physiquement réaliste, à impédance acoustique croissante, et on veut comparer les ondes de chocs et de raréfaction de vitesse $\lambda_2 = u + c$, dont l'état à droite est noté $(q_d, m_d = u_d q_d)$. Pour que le choc soit compatible avec la condition d'entropie, on doit avoir $q > q_d$. Et pour $q \leq q_d$ une onde de raréfaction est bien entendue attendue. On considère cependant, dans le **plan de phase** (q, m) , la courbe représentée par l'invariant

$$u - H(q) = Q(q_d, u_d) = u_d - H(q_d) .$$

On écrit cette courbe sous la forme

$$u = u_d + H(q) - H(q_d) = u_d + \int_{q_d}^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta .$$

Nous allons utiliser l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** qui s'écrit, pour toutes fonctions f et g de carré intégrable sur $[q_d, q]$,

$$\int_{q_d}^q f(\theta) g(\theta) d\theta \leq \sqrt{\int_{q_d}^q f(\theta)^2 d\theta} \sqrt{\int_{q_d}^q g(\theta)^2 d\theta} .$$

Nous l'appliquons ici pour $q_d > 0$, $g(\theta) = c(\theta)$ et $f(\theta) = \frac{1}{\theta}$, qui sont bien de carré intégrable sur tout intervalle $[q_d, q]$, pourvu que q_d soit strictement positif, ce que nous avons justement supposé. Nous avons ici

$$\int_{q_d}^q f(\theta)^2 d\theta = \int_{q_d}^q \frac{1}{\theta^2} d\theta = \left[-\frac{1}{\theta} \right]_{q_d}^q = \frac{q - q_d}{q q_d} ,$$

et

$$\int_{q_d}^q g(\theta)^2 d\theta = \int_{q_d}^q c(\theta)^2 d\theta = P(q) - P(q_d) .$$

On a donc

$$\int_{q_d}^q \frac{c(\theta)}{\theta} d\theta \leq \sqrt{\frac{q - q_d}{q q_d}} \sqrt{P(q) - P(q_d)} = Z(q, q_d) (q - q_d) .$$

On en déduit le résultat suivant, en rappelant que la courbe d'équation $u = u_d + Z(q, q_d) (q - q_d)$ représente les chocs possibles (on l'appellera la **courbe d'Hugoniot**).

Théorème 4.6.4 *Pour un système physiquement réaliste, d'impédance croissante, la courbe de choc, ou courbe d'Hugoniot majore la courbe représentant l'invariant de Riemann, pour une onde de vitesse $\lambda_2 = u + c$. Elle la minore pour une onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$. De plus ces deux courbes coïncident au point (q_d, m_d) où elles sont tangentes, et toutes les deux convexes si elles sont représentées dans le plan de phase (q, m) , pour la vitesse $\lambda_2 = u + c$ ou toutes les deux concaves pour l'onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$.*

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz a permis de classer les deux courbes sur l'intervalle $[q_d, q]$, le seul cas possible pour les chocs compatibles avec la condition d'entropie. Il est immédiat que les deux courbes coïncident en (q_d, m_d) . Il reste à montrer qu'elles sont tangentes. Pour la courbe d'Hugoniot, on a

$$\frac{m - m_d}{q - q_d} = \frac{u_d (q - q_d)}{q - q_d} + q Z(q, q_d) = u_d + q Z(q, q_d) ,$$

et il reste à faire tendre q vers q_d en conservant $q > q_d$. Or $Z(q, q_d)$ tend vers

$$\sqrt{\frac{P'(q_d)}{q_d^2}} = \frac{c(q_d)}{q_d}$$

et on en déduit immédiatement que la tangente est égale à $u_d + c(q_d)$ c'est à dire λ_2 . La pente de la courbe représentée par l'invariant de Riemann est égale à

$$m'(q_d) = u_d + q_d H'(q_d) = u_d + c(q_d)$$

également. On obtient, en dérivant une seconde fois,

$$m''(q) = 2 H'(q) + q H''(q) = \frac{1}{q} (qc'(q) + q) > 0 ,$$

d'après l'hypothèse d'impédance acoustique croissante. Cette courbe est bien convexe, et la courbe d'Hugoniot minorée par une courbe convexe dont elle tangente, est elle aussi nécessairement convexe (il suffit d'utiliser un développement limité). Le théorème est démontré.

En pratique, les deux quantités

$$\frac{P_d - P}{q_d - q} \quad \text{et} \quad c(q_d)^2$$

sont grandes, et relativement très proches. La différence entre la courbe d'Hugoniot et l'invariant de Riemann est difficile à percevoir, et souvent les expérimentateurs ne font pas la différence. De son côté, le modélisateur doit cependant faire le choix de l'expression analytique de la courbe choisie, et naturellement fera le choix de la représentation par l'invariant de Riemann, qui rend les calculs bien plus faciles.

4.7 Les chocs en détonique

On veut aborder ici la modélisation de matériaux plus élastiques que les gaz ou l'eau vus jusqu'ici ; les applications sont nombreuses, depuis les simulations de crashes ou d'accidents de voitures, pour les modèles utilisés en matière de sécurité, jusqu'à des applications industrielles d'impacts, ou bien sûr militaires, dans cette interminable course entre la flèche et le blindage. La prospection géologique ou minière exploite également de tels modèles.

Dans les matériaux élastiques, la dépendance entre la vitesse du son et la densité est beaucoup plus délicate à manipuler. Par exemple, une variation infime de la densité va provoquer une très forte montée de la contrainte dans des matériaux comme l'acier. Ceci va se traduire par des coefficients très grands dans les lois d'état, et provoquer une très forte sensibilité aux inévitables erreurs d'arrondis de la machine. On préfère en général considérer que la densité est une constante, qu'on notera ρ_0 et utiliser les deux variables suivantes : la **vitesse** u et la **contrainte** $\sigma = -p$ qui est l'analogue d'une **pression** ici, en dimension un d'espace. Pour plus de commodité nous n'utiliserons en fait que la notation p c'est à dire la pression, parce qu'elle est toujours positive.

Le modèle utilisé est le suivant ; il s'inspire de l'étude des systèmes d'ordre 3 (paragraphe 3.4) en densité, vitesse, pression, dont on a purement et simplement enlevé l'équation de conservation de la masse, et remplacé la densité dans les deux autres équations par la constante ρ_0 . La **vitesse du son**, notée $c(p)$, est ici une fonction de la pression, strictement positive, et en général croissante. Elle ne dépend pas de la vitesse u pour assurer l'invariance par transformation galiléenne. On obtient ainsi une **équation dynamique**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 ,$$

et une équation de pression qu'on appellera ici la **loi de Hooke**

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c(p)^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

La matrice de flux s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c(p)^2 & u \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = u - c(p)$ et $\lambda_2 = u + c(p)$, différentes ; le système est bien strictement hyperbolique. Les vecteurs propres associés sont par exemple $R_1 = (1, -\rho_0 c(p))$ pour $\lambda_1 = u - c(p)$ et $R_2 = (1, \rho_0 c(p))$ pour $\lambda_2 = u + c(p)$, qui donnent

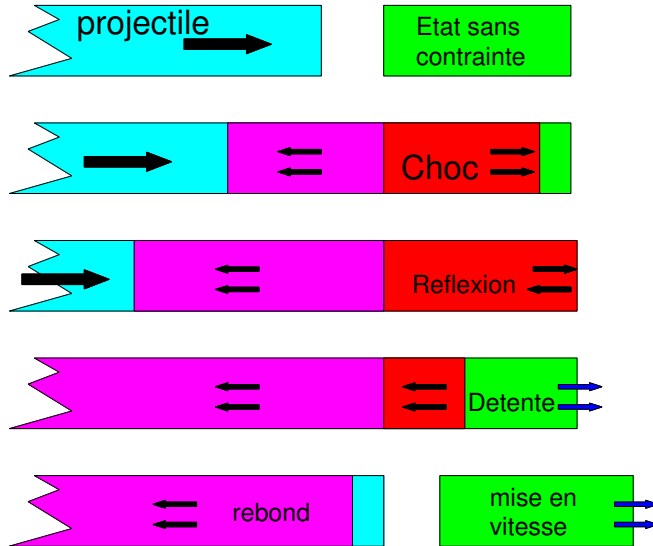
$$\nabla \lambda_1 . R_1 = \nabla \lambda_2 . R_2 = 1 + \rho_0 c(p) c'(p) > 1 ,$$

si $c(p)$ est croissante. Les deux ondes sont vraiment non linéaires, même lorsque la vitesse du son $c(p)$ est une fonction constante.

On appellera **modèle élastique** le système constitué de l'équation dynamique et de la loi de Hooke décrites ci dessus. On constate que la loi de Hooke ne correspond pas à une forme conservative, et de ce fait, il ne sera pas possible d'en déduire une relation de Rankine Hugoniot pour gérer les ondes de choc. De plus, l'expression de la vitesse du son $c(p)$ en fonction de la pression p n'a pas non plus été précisée. Nous allons dans la suite, décrire un processus expérimental qui va permettre d'obtenir à la fois cette loi d'état et une forme conservative pour une nouvelle variable q régie par une nouvelle équation qui viendra se substituer à la loi de Hooke.

4.7.1 Le processus expérimental

On se réfère à la figure ci dessous, qui représente les cinq étapes du processus.



Un bloc de matériau immobile et dans un état neutre (vitesse et contrainte nulles) est représenté à droite (rectangle vert). On veut construire point par point la loi d'état de ce matériau. Pour cela on va l'impacter par un projectile constitué d'un matériau connu, lancé à une vitesse v_0 également connue.

L'impact (que l'on fixe à l'instant $t = 0$) génère une onde de choc dans le bloc de matériau test qui va le traverser de part en part. Après le passage de cette onde, ce matériau test est porté à un état de contrainte que l'on représentera par une valeur p_* de la pression, avec une vitesse positive u_* . Ce nouvel état est représenté par une zone rouge. Cependant cette mise en vitesse n'est pas encore apparente, parce que l'onde de choc n'a pas encore traversé tout le bloc. Dans le bloc projectile, une autre onde, de choc également, remonte en le portant au même état de pression p_* et de vitesse u_* .

Ensuite, dans le matériau test, l'onde de choc parvient à l'extrémité du bloc, et amorce une réflexion, en générant une **onde de détente**, c'est à dire une onde de raréfaction, le mot "détente" étant le terme consacré par les ingénieurs. Dans le projectile, qui est plus long, l'onde issue de l'impact continue à remonter.

L'onde de détente produit une mise en vitesse du bloc de matériau test, cette vitesse sera notée w_* , et la réduction de la contrainte pour retrouver un état neutre $p = 0$. Cette onde de détente remonte le bloc jusqu'à la face où l'impact a eu lieu.

Lorsque l'onde de détente a atteint la face d'impact, la mise en vitesse de la totalité du bloc de matériau test est effective et bien apparente, on mesure cette vitesse w_* à l'aide d'une caméra rapide. Dans le bloc projectile, une onde de détente se propage également en remettant ce matériau dans un état neutre et en le portant à une nouvelle vitesse, qui peut être négative (rebond) ou non.

Les résultats expérimentaux sont constitués de la mesure de la vitesse w_* et de la connaissance que l'on a du matériau du bloc projectile, qui est porté à la même vitesse u_* et à la même pression p_* que le bloc de matériau test après le passage de l'onde de choc. Cette expérience peut être reconstituée plusieurs fois, pour le même matériau test (et bien sûr des éprouvettes différentes), et soit des projectiles différents, soit les mêmes projectiles lancés à des vitesses différentes.

4.7.2 L'exploitation des résultats expérimentaux

Le but est de construire la courbe d'Hugoniot du matériau test, puis d'en déduire l'expression de $c(p)$ en fonction de p compatible avec cette courbe d'Hugoniot. On constate que la variation de $c(p)$ reste limitée, et de ce fait, la différence entre la courbe d'Hugoniot et la courbe représentant l'invariant de Riemann (dans le plan (q, u) par exemple) devient imperceptible, et comme, les ingénieurs, on va tout simplement identifier ces deux courbes.

Pour un matériau donné, on s'intéresse aux courbes d'Hugoniot de la forme

$$p = \rho_0 (c_0 (u - u_0) + s_0 (u - u_0)^2) \quad , \quad u \geq u_0 \quad ,$$

pour les ondes de vitesse $\lambda_2 = u + c$, ce qui peut aussi prendre la forme

$$u = u_0 + \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right)$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{c_0}{2 s_0} \quad , \quad \beta_0 = \frac{4 s_0}{\rho_0 c_0^2} \quad .$$

Pour les ondes de vitesse $\lambda_1 = u - c$, les expressions sont de la forme

$$p = \rho_0 \left(-c_0 (u - u_0) + s_0 (u - u_0)^2 \right) \quad , \quad u \leq u_0 \quad ,$$

ou de la forme

$$u = u_0 - \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right)$$

pour les ondes de vitesse $\lambda_1 = u - c$, où u_0 est une vitesse donnée. Les coefficients ρ_0 , c_0 et s_0 , donc aussi α_0 et β_0 , sont propres à chaque matériau. Le tableau suivant en présente quelques uns.

Matériau	α_0	β_0	ρ_0	c_0	s_0
Or	972	$3.5 \cdot 10^{-11}$	19240	3056	1.572
Fer	931	$7.66 \cdot 10^{-11}$	7850	3574	1.920
Eau	429	$2.84 \cdot 10^{-9}$	998	1647	1.921
Cuivre	1323	$4.295 \cdot 10^{-11}$	8930	3940	1.489
Plexiglas	857	$7.57 \cdot 10^{-10}$	1186	2598	1.516
Plomb	702	$1.22 \cdot 10^{-10}$	11350	2051	1.1460
Beryllium	3558	$3.8 \cdot 10^{-11}$	1851	7998	1.124
Titane	3403	$2.49 \cdot 10^{-11}$	4528	5220	0.767
Tungstène	1629	$1.6 \cdot 10^{-11}$	19224	4029	1.237
Uranium	565	$7.5 \cdot 10^{-11}$	18950	2487	2.2

On constate que le produit $\alpha_0\beta_0\rho_0c_0$ est toujours proche de 2 ; en fait il doit théoriquement être égal à 2.

En lançant un projectile en fer sur un bloc (test) de cuivre, à la vitesse de $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$, on voit ce bloc être explosé à la vitesse $w_* = 89.32 \text{ m s}^{-1}$ ce qui correspond à une vitesse $u_* = 44.66 \text{ m s}^{-1}$ dans l'état contraint. En reportant cette vitesse sur la courbe d'Hugoniot du fer :

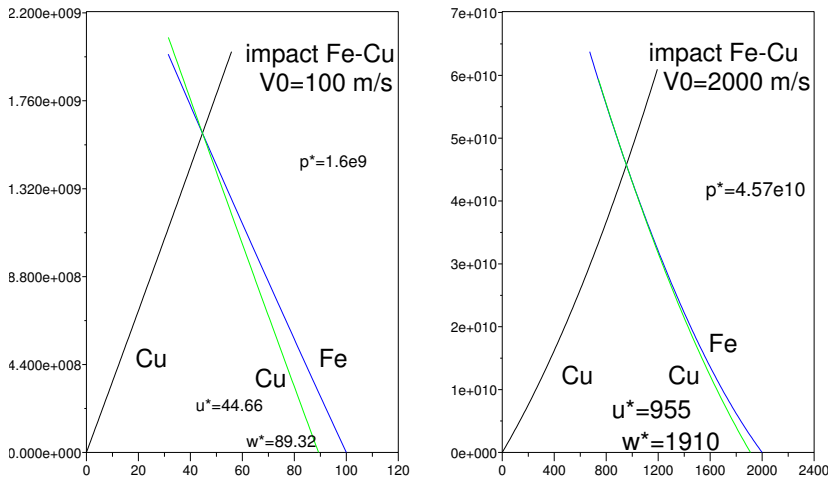
$$u = v_0 - \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right)$$

avec α_0 et β_0 correspondants aux valeurs du fer dans le tableau ci dessus, on obtient une pression en zone contrainte égale à $p_* = 1.6 \cdot 10^9 \text{ pascals}$. On en déduit que la courbe d'Hugoniot du cuivre, de la forme

$$u = \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right)$$

passé nécessairement par ce point (p_*, u_*) . En procédant à une seconde expérience, en lançant par exemple le projectile avec une vitesse différente, on obtient un autre point de cette courbe d'Hugoniot du cuivre, et d'autres expériences fourniront d'autres points. On peut ensuite déterminer les valeurs de α_0 et de β_0 par moindres carrés par exemple.

La figure ci dessous montre deux telles expériences, pour des vitesses très différentes du projectile, 100 m s^{-1} et 2000 m s^{-1} .



On observe que dans le premier cas, les courbes d'Hugoniot sont pratiquement des droites, mais ce n'est apparemment plus vrai dans le second cas, qui est plus énergétique.

On procède maintenant au calcul de $c(p)$. Pour cela, on cherche une densité q "fictive", fonction de la pression p , telle que q et $m = qu$ soient les composantes de la solution d'un système physiquement réaliste :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c(p)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad .$$

On suppose $q(0) = q_0 > 0$, pour assurer la possibilité d'un choc. Lors de l'exploitation des résultats expérimentaux, on n'a pas fait de différence entre les courbes d'Hugoniot représentant un choc ou celles représentant une détente. Effectivement, ces courbes sont très proches des invariants de Riemann, mais leurs expressions analytiques restent différentes. Il convient donc, pour la recherche de $c(q)$ de déterminer l'interprétation que l'on fait de la courbe d'Hugoniot, en l'identifiant soit à un choc, soit à une détente, en utilisant les invariants de Riemann. On étudie ces deux cas.

Identification des chocs

En reportant $q = q(p)$ dans les deux équations précédentes, il vient

$$q'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q(p) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

et

$$q(p) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(p)^2 q'(p) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad .$$

On obtient la condition nécessaire

$$\rho_0 c(p)^2 q'(p) = q(p) \quad .$$

On désigne la (nouvelle) pression associée à q par $Y(q)$, nulle lorsque $q = q_0$; on doit avoir

$$\frac{dY}{dq} = c(p)^2 \quad .$$

Par ailleurs les relations de Rankine Hugoniot imposent la condition de compatibilité

$$\sqrt{\frac{1}{qq_0} \frac{Y(q)}{q - q_0}} (q - q_0) = g(p) \quad ,$$

en posant

$$g(p) = u = \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right) \quad .$$

On en déduit

$$Y(q) = \frac{q q_0}{q - q_0} g(p)^2 \quad .$$

On dérive maintenant cette équation par rapport à p , pour obtenir, en utilisant

$$\frac{d}{dp}Y(q) = \frac{dY}{dq}q'(p) = c(p)^2q'(p) = \frac{q}{\rho_0} ,$$

l'équation différentielle

$$q_0^2 q'(p) = 2 \frac{q - q_0}{g(p)} q q_0 g'(p) - \frac{q}{\rho_0} \left(\frac{q - q_0}{g(p)} \right)^2 .$$

L'intégration (numérique bien sûr) de cette équation différentielle avec la condition $q(0) = q_0$ permet d'obtenir $q(p)$. On en déduit l'expression de $c(p)$ en multipliant cette équation par

$$\rho_0 \frac{c(p)^2}{q} \left(= \frac{1}{q'(p)} \right)$$

pour obtenir

$$q_0^2 = \rho_0 c(p)^2 \left(2 \frac{q - q_0}{g(p)} q q_0 g'(p) - \frac{q}{\rho_0} \left(\frac{q - q_0}{g(p)} \right)^2 \right) ,$$

dont on extrait $c(p)$ connaissant $q(p)$, c'est à dire

$$c(p) = \frac{q_0 g(p)}{\sqrt{q(q - q_0) (2\rho_0 q_0 g(p)g'(p) - q + q_0)}} .$$

Notons qu'il faut conserver

$$2\rho_0 q_0 g(p)g'(p) > q - q_0 ,$$

et en remarquant que

$$g(p)g'(p) \simeq \frac{\alpha_0^2 \beta_0}{2}$$

on obtient

$$2 \rho_0 g(p) g'(p) \simeq \rho_0 \alpha_0^2 \beta_0 \simeq \frac{2 \alpha_0}{c_0} = \frac{1}{s_0} .$$

On en déduit que les valeurs de q resteront dans un intervalle borné :

$$q_0 \leq q < q_0 \frac{1 + s_0}{s_0} .$$

Notons que la "nouvelle densité" q se comporte effectivement comme une densité, en restant bornée et positive, mais elle peut varier beaucoup plus que les densités classiques des matériaux élastiques, de plus 50%, et même plus de 100% pour certains matériaux, comme le titane. On ne rencontrera donc pas les problèmes liés aux arrondis de la machine, comme on le constate pour les densités conventionnelles. En normalisant $q_0 = 1$, ce qui revient à effectuer un choix d'unité pour la quantité q , on constate que l'intervalle possible pour les valeurs de q est restreint à $[1, 1 + \frac{1}{s_0}]$, dont la longueur va de 0.45 pour l'uranium à 0.52 pour le fer ou l'eau, et jusqu'à 1.3 pour le titane. Notons aussi que le rapport

$$\frac{q - q_0}{g(p)}$$

reste toujours borné lorsque p tend vers zéro.

Pour $p \leq 10^4 \text{ bars}$, on peut approcher $g(p)$ par un développement au premier ordre, c'est à dire

$$g(p) \simeq \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

et obtenir une équation différentielle un peu plus simple pour q . L'intervalle de valeur devient plus étendu :

$$q_0 \leq q \leq q_0 \left(1 + \frac{2 p}{\rho_0 c_0^2} \right) .$$

On retient cependant que l'intervalle des valeurs possibles de q reste limité.

Identification des invariants de Riemann

Reprenons le système constitué de l'équation dynamique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 ,$$

et de la loi de Hooke

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c(p)^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

L'équation différentielle donnant les invariants de Riemann se réduit à

$$u'(p) = \pm \frac{1}{\rho_0 c(p)} .$$

Les courbes d'Hugoniot sont de la forme

$$u(p) = \pm \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right)$$

qu'on dérive pour obtenir

$$u'(p) = \pm \frac{\alpha_0 \beta_0}{2 \sqrt{1 + \beta_0 p}} .$$

On en déduit l'identification

$$\frac{1}{\rho_0 c(p)} = \frac{\alpha_0 \beta_0}{2 \sqrt{1 + \beta_0 p}}$$

ou encore

$$c(p) = \frac{2}{\alpha_0 \beta_0 \rho_0} \sqrt{1 + \beta_0 p} ,$$

et comme $2 = \alpha_0 \beta_0 \rho_0 c_0$, on préfère écrire

$$c(p) = c_0 \sqrt{1 + \beta_0 p} .$$

Il reste à chercher la quantité conservative

$$q = q(p)$$

associée, qui viendra remplacer la densité usuelle. Comme précédemment, on reporte $q = q(p)$ dans les deux équations

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c(p)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad ,$$

et il vient

$$q'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q(p) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

et

$$q(p) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(p)^2 q'(p) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad .$$

On obtient encore la condition nécessaire

$$\rho_0 c(p)^2 q'(p) = q(p) \quad ,$$

mais cette fois ci, l'expression de $c(p)$ est connue. On obtient l'équation différentielle

$$\rho_0 c_0^2 (1 + \beta_0 p) q'(p) = q(p)$$

qui s'intègre immédiatement pour donner

$$q(p) = (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \quad ,$$

en prenant $q(0) = 1$. L'expression de la vitesse $c(p)$ en fonction de q s'écrit

$$c = c_0 q^{\frac{c_0}{\alpha_0}} \quad ,$$

et on se retrouve en présence d'un système de type Euler, comme en hydrodynamique. La pression correspond à une expression de la forme

$$P(q) = P_0 q^{\gamma_0} \quad ,$$

avec

$$\gamma_0 = 1 + 2 \frac{c_0}{\alpha_0} = 1 + 4 s_0 \quad .$$

Les valeurs de γ_0 vont de 4.0679 pour le titane, à 8.678 pour le fer et l'eau, et jusqu'à 9.80 pour l'uranium.

A la différence de l'identification par les chocs, l'intervalle des valeurs de q est beaucoup plus grand, s'agissant de $[1, +\infty[$, pour les pressions positives, mais en pratique, on retrouve les mêmes valeurs, puisque par exemple la valeur $q = \sqrt{2}$ correspond à la pression $p = \frac{1}{\beta_0}$, de l'ordre de $10^{11} Pascal$ soit un mégabar. Le gigabar est atteint pour $q = 30$. Nous verrons plus loin, au Chapitre 7, que pour les plus forts séismes, au fond de l'océan, il est difficile de dépasser la valeur $q = 1.1$. Des valeurs de q inférieures à 1 restent envisageables, et correspondent à des pressions négatives, que l'on peut attendre lors d'une importante détente, comme par exemple un phénomène d'écaillage d'un matériau, pouvant en provoquer la rupture.

Chapitre 5

Les termes sources, l'exemple de l'hydraulique

5.1 Introduction

La présence d'un terme source dans une équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S(\phi) = 0$$

va fortement modifier la nature des ondes solutions par rapport à celles de l'équation d'onde homogène associée. Au chapitre précédent, en Section 3.3.5, nous avons montré qu'une équation d'onde scalaire, avec un terme source, pouvait s'interpréter comme un système de deux ondes dont les deux vitesses caractéristiques sont $\lambda(\phi)$ et $\lambda = 0$. Au chapitre 2, en Section 2.6.3, un exemple d'onde de vitesse constante a également été présenté, comme une solution bien particulière de l'équation de Burgers avec un terme source, la vitesse constante de l'onde étant déterminée par une racine de ce terme source. Une telle situation n'est pas envisageable dans le cas homogène.

Cette présence du terme source permet que de nouveaux équilibres entre les termes puissent apparaître. En effet, dans le cas homogène, l'équation impose un seul équilibre possible : la dérivée en temps doit compenser les variations de la dérivée en espace du flux. Ici, entre les trois termes en présence, plusieurs types d'équilibre peuvent apparaître. Ainsi, les solutions stationnaires sont obtenues en imposant une compensation complète entre la dérivée du flux, en espace, et le terme source. D'autres solutions correspondent à une compensation entre la dérivée en temps et le terme source. On peut aussi envisager de retrouver un équilibre entre la dérivée en temps et la dérivée en espace du flux, lorsque le terme source devient nul pour une valeur particulière ϕ_* ; la vitesse de l'onde sera alors nécessairement $\lambda(\phi_*)$, c'est à dire une constante, et cette solution aura le comportement d'une solution d'équation linéaire homogène. Nous proposons d'appeler **ondes sources** ces ondes dont la vitesse (constante) est imposée par les racines du terme source. Ces ondes sources correspondent à de nombreux phénomènes, notamment en **physique de l'environnement**, et permettent de modéliser par exemple des cyclones, tornades dans l'atmosphère, les tsunamis, les ondes de surf ou les mascarets en hydraulique littorale ou fluviale, la rupture d'un barrage sur une pente, le comportement des conducteurs en trafic routier, etc...

5.2 Le calcul des ondes sources

On considère un système physiquement réaliste, non homogène, à impédance acoustique croissante. Il est constitué de l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 ,$$

et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 u \frac{\partial m}{\partial x} + (c(q)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 ,$$

où bien entendu

$$u = \frac{m}{q}$$

et le terme source $S(q, m)$ ne dépend que de q et de m ; on envisagera plus loin le cas où il peut aussi dépendre de x , un peu plus délicat à traiter.

La présence de ce terme source rend inutile l'exploitation des invariants de Riemann, tout simplement parce qu'ils ne sont plus invariants. On peut cependant envisager le même type de prospection, en écrivant une dépendance entre q et m au niveau d'une onde (non triviale, c'est à dire q non constant par exemple). On pose encore

$$m = m(q) ,$$

qui transforme l'équation de conservation de la masse en

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m'(q) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 .$$

On note que $m'(q)$ s'interprète déjà comme la vitesse d'une onde. En reportant cette équation dans celle de la conservation de la quantité de mouvement, on aboutit à l'équation

$$\frac{(m'(q) - u)^2 - c(q)^2}{S(q, m(q))} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

dite **équation du profil**. Cette situation est propre à la présence du terme source; on n'aurait jamais pu avoir " $= 1$ " dans le cas homogène. On introduit une fonction $\psi(q)$ telle que

$$\psi'(q) = \frac{(m'(q) - u)^2 - c(q)^2}{S(q, m(q))} .$$

L'équation précédente se transforme en

$$\psi'(q) \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

qu'on intègre en x pour obtenir

$$\psi(q) = x - K(t) ,$$

où $K(t)$ est une "constante" d'intégration par rapport à la variable x , mais qui peut encore dépendre de la variable t . Une dérivation en t donne maintenant

$$\psi'(q) \frac{\partial q}{\partial t} = -K'(t) ,$$

et compte tenu de l'équation de conservation de la masse, on a

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -m'(q) \frac{\partial q}{\partial x} ,$$

donc

$$m'(q) \psi'(q) \frac{\partial q}{\partial x} = K'(t) ,$$

qui se réduit simplement en

$$m'(q) = K'(t).$$

Il reste à dériver une nouvelle fois en x pour obtenir

$$m''(q) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

c'est à dire

$$m''(q) = 0 ,$$

puisque le profil n'est pas constant (onde non triviale). On obtient qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$m(q) = Aq - B , \quad K(t) = At - C ,$$

où C est une autre constante qui peut être prise égale à zéro ou assimilée à l'expression de $\psi(q)$. Notons que A a la dimension d'une vitesse et B celle d'une impédance acoustique. On obtient un profil d'onde q vérifiant

$$\psi(q) = x - At$$

ou encore

$$q = \psi^{-1}(x - At)$$

qui exprime que l'onde obtenue est une **onde progressive** qui se propage à la vitesse A . La fonction $\psi(q)$ est appelée **profil inverse** de l'onde. Il reste à caractériser les choix des valeurs de A et de B .

En reportant $m(q) = Aq - B$, et en remarquant que

$$u = A - \frac{B}{q} ,$$

dans l'équation du profil, on obtient

$$\frac{\left(\frac{B}{q}\right)^2 - c(q)^2}{S(q, Aq - B)} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

qu'on préfère utiliser sous la forme

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q^2 S(q, Aq - B)}{B^2 - q^2 c(q)^2} ,$$

qui correspond à l'écriture générale de l'**équation du profil**. Elle s'interprète comme une équation différentielle en q , à t fixé.

L'impédance acoustique du système est croissante, et plus précisément prend toutes les valeurs possibles depuis zéro, pour $q = 0$, à une valeur en général infinie lorsque q tend vers l'infini. On doit donc s'attendre à trouver une valeur singulière q_* pour laquelle

$$q_* c(q_*) = |B| .$$

Cette valeur sera appelée **profil de référence**. Elle constitue une racine du dénominateur dans l'équation du profil, et il n'est pas exclu en général que cette valeur puisse être atteinte.

On a en fait l'alternative suivante :

- ou bien le terme source $S(q, Aq - B)$ admet une racine, et dans ce cas il est nécessaire que A prenne une valeur telle que q_* soit cette racine :

$$S(q_*, Aq_* - B) = 0 ,$$

ce qui détermine B ,

- ou bien le terme source $S(q, m)$ est de signe constant et dans ce cas le choix

$$q_* = 0$$

s'impose, donc $B = 0$, la valeur de la vitesse A restant indéterminée.

Ceci permet de définir deux types d'ondes sources.

Définition 5.2.1 Une **onde source** est une onde progressive dont la vitesse et le profil sont complètement déterminés par les racines du terme source. Lorsque le terme source est de signe constant, une **onde source dégénérée** correspond à une onde progressive de vitesse A pour une équation de profil de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{S(q, Aq)}{c(q)^2} .$$

Lorsque $B > 0$, une onde source est de vitesse

$$A = u + \frac{q_* c(q_*)}{q} ,$$

assimilée à une onde de vitesse $\lambda_2 = u + c$. Dans ce cas, une onde régulière (comme une onde de raréfaction) doit être croissante, ce qui se traduit par la condition

$$S(q, Aq - q_* c(q_*)) (q_* - q) > 0 ,$$

qui va assurer que cette onde ne dégénère pas en une onde de choc.

De façon similaire, lorsque $B < 0$, une onde source est de vitesse

$$A = u - \frac{q_* c(q_*)}{q} ,$$

assimilée à une onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$. Dans ce cas, une onde régulière (comme une onde de raréfaction) doit être décroissante, ce qui se traduit par la condition

$$S(q, Aq - q_* c(q_*)) (q_* - q) < 0 ,$$

qui va assurer que cette onde ne dégénère pas en une onde de choc.

Dans les autres cas, des ondes de choc apparaissent, qui sont compatibles avec la condition d'entropie, exactement comme dans le cas homogène, les relations de Rankine-Hugoniot étant indépendantes des termes sources. Dans le cas d'une onde source, la vitesse doit être égale à A , ce qui donne les relations

$$A = \frac{m_2 - m_1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{m_2^2}{q_2} + P(q_2) - \frac{m_1^2}{q_1} - P(q_1)}{m_2 - m_1} , \quad \text{avec} \quad P(q) = \int_0^q c(\theta)^2 d\theta ,$$

comme dans le cas homogène à cette différence près : la vitesse est constante. Ces chocs peuvent ainsi être assimilés à des discontinuités de contact pour la version linéaire de l'équation.

Les résultats obtenus sont inattendus, dans la mesure où ils sont plus simples que dans le cas homogène. Le calcul explicite du profil est réalisable, dans de nombreux cas, en intégrant directement l'équation du profil. De plus, la propagation se fait à vitesse constante, comme s'il s'agissait d'un problème linéaire. La question essentielle est maintenant de développer des applications, de façon à assurer le réalisme de la démarche et du calcul précédent. De fait, ces applications sont nombreuses, et se rencontrent notamment dans les sciences de l'environnement.

5.3 L'analyse dans le plan de phase

Le système considéré est toujours physiquement réaliste, d'impédance acoustique étant supposée strictement croissante. Cette section propose une interprétation dans le plan de phase (q, m) , d'abord pour les profils réguliers, ensuite pour les chocs.

5.3.1 Analyse pour les profils réguliers

L'équation de profil peut se mettre sous la forme

$$(B^2 - q^2 c(q)^2) \frac{\partial q}{\partial x} = q^2 S(q, Aq - B) .$$

Soit q_0 une racine de $S(q, Aq - B)$, s'il en existe. Il y a alors deux seuls cas possibles :

- ou bien $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, et le profil est constant : $q = q_0$,
- ou bien q_0 vérifie

$$q_0 c(q_0) = |B| ,$$

et constitue ainsi une valeur de référence. On peut envisager dans ce dernier cas que $\frac{\partial q}{\partial x}$ soit non nul et par conséquent un profil non constant.

Par ailleurs, un état donné $M_0 = (q_0, m_0)$ induit deux vitesses caractéristiques $A_0 = \frac{m_0}{q_0} + c(q_0)$ et $A'_0 = \frac{m_0}{q_0} - c(q_0)$, qui correspondent à deux droites dans le plan de phase, qui font l'objet de la définition suivante.

Définition 5.3.1 *Etant donné un état $M_0 = (q_0, m_0)$, on définit la droite caractéristique $K_+(M_0)$ par l'équation*

$$m = \left(\frac{m_0}{q_0} + c(q_0) \right) (q - q_0) + m_0 ,$$

et la droite caractéristique $K_-(M_0)$ par l'équation

$$m = \left(\frac{m_0}{q_0} - c(q_0) \right) (q - q_0) + m_0 .$$

Remarquons que ces deux droites passent par M_0 et que les vitesses caractéristiques correspondent à leurs pentes.

On considère maintenant les autres droites passant par M_0 , dont l'équation générale est

$$m = A (q - q_0) + m_0 ,$$

pour une pente A donnée. On cherche à caractériser ces droites par un **état de référence** ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.3.2 *Soit $M_0 = (q_0, m_0)$ un état du plan de phase et A un réel. Il existe un seul état $M_A = (q_A, m_A)$ dont la vitesse caractéristique est A et situé sur une droite de pente A passant par M_0 .*

Démonstration On considère d'abord le cas où $Aq_0 - m_0 \geq 0$. On cherche q et m tels que

$$\frac{m}{q} + c(q) = A , \quad m = A (q - q_0) + m_0 ,$$

ce qui induit l'équation suivante, portant sur la variable q ,

$$(m =) Aq - c(q) = Aq_0 - m_0 ,$$

qui se réduit à

$$q c(q) = Aq_0 - m_0 (\geq 0) ,$$

qui admet une solution unique notée q_A , sachant que l'impédance acoustique $qc(q)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$, et donc en particulier la valeur $Aq_0 - m_0$. Pour le cas où $Aq_0 - m_0 < 0$, on cherche q et m tels que

$$\frac{m}{q} - c(q) = A , \quad m = A (q - q_0) + m_0 ,$$

ce qui induit l'équation suivante, portant sur la variable q ,

$$(m =) Aq + c(q) = Aq - (Aq_0 - m_0) ,$$

qui se réduit à

$$q c(q) = - Aq_0 + m_0 \ (\geq 0) ,$$

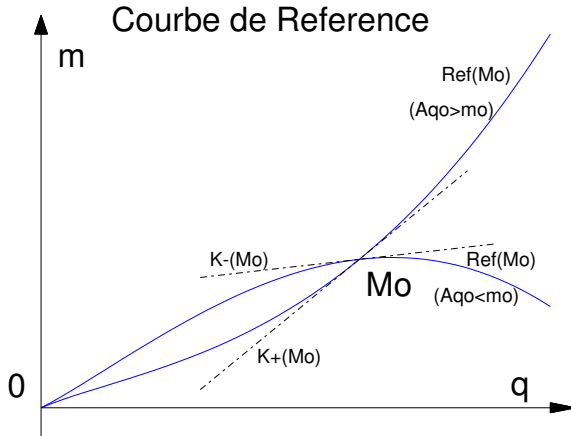
qui admet une solution unique q_A , de la même façon.

Remarque 5.3.3 En notant $m = Aq - B$ l'équation de la droite, de pente A , passant par M_0 et M_A , on a $B = Aq_0 - m_0 = Aq_A - m_A = m_A \pm q_A c(q_A) - m_A$ c'est à dire

$$B = \pm q_A c(q_A)$$

et ainsi q_A est une valeur de référence.

Définition 5.3.4 Etant donnée une droite de pente A passant par M_0 , l'état M_A déterminé par la proposition précédente est appelé **état de référence**. La courbe représentant tous les états de références possibles pour un état M_0 donné est notée $Ref(M_0)$.



La courbe $Ref(M_0)$ est constituée de deux parties, l'une, notée $Ref_+(M_0)$, correspondant à $A > 0$, qui est toujours croissante à l'infini, l'autre, notée $Ref_-(M_0)$, correspondant à $A < 0$,

toujours décroissant à l'infini. Ces deux courbes passent par l'origine et par M_0 . La pente en M_0 est toujours égale à $\frac{m_0}{q_0} + c(q_0)$ pour la première, et à $\frac{m_0}{q_0} - c(q_0)$ pour la seconde. Ceci signifie qu'en M_0 la caractéristique $K_+(M_0)$ est tangente à $Ref_+(M_0)$ et la caractéristique $K_-(M_0)$ est tangente à $Ref_-(M_0)$. On peut remarquer le résultat suivant.

Théorème 5.3.5 *Soit M_0 et M deux états du plan de phase. Alors*

$$M \in Ref_+(M_0) \iff M_0 \in K_+(M) \quad \text{et} \quad M \in Ref_-(M_0) \iff M_0 \in K_-(M) \quad .$$

Démonstration Il suffit d'écrire l'équation

$$m = (m_0 + c(q)(q - q_0)) \frac{q}{q_0}$$

sous la forme

$$m_0 = \left(\frac{m}{q} + c(q) \right) (q_0 - q) + m \quad .$$

On procède de façon identique pour Ref_- et K_- en changeant $c(q)$ en $-c(q)$.

Le cas $Aq_0 = m_0$ correspond à l'état de référence 0.

On a jusqu'à maintenant établi que les états possibles d'un profil d'onde étaient portés par un segment de droite du plan de phase, noté $m = Aq - B$. Il reste à étudier dans quel sens ce segment est décrit. Ceci est fortement dépendant du signe du terme source S .

On suppose dans un premier cas que S est positif dans un voisinage de $M_0 = (q_0, m_0)$. On considère ensuite un état de référence $M_{ref} \in Ref(M_0)$, noté $M_{ref} = (q_{ref}, m_{ref})$. On suppose qu'on a également $S(q_{ref}, m_{ref}) > 0$. L'équation décrivant le profil d'onde est de la forme

$$m = A_{ref}q - B_{ref} \quad ,$$

avec

$$A_{ref} = \frac{m_{ref}}{q_{ref}} + c(q_{ref}) \quad , \quad B_{ref} = q_{ref}c(q_{ref}) \quad ,$$

si $A_{ref}q_0 - m_0 \geq 0$, et

$$A_{ref} = \frac{m_{ref}}{q_{ref}} - c(q_{ref}) \quad , \quad B_{ref} = -q_{ref}c(q_{ref}) \quad ,$$

si $A_{ref}q_0 - m_0 \leq 0$. L'équation du profil s'écrit

$$\frac{q_{ref}^2 c(q_{ref})^2 - q c(q)}{q^2 S(q, A_{ref}q - B_{ref})} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \quad ,$$

et où on a supposé

$$S(q, A_{ref}q - B_{ref}) > 0$$

en particulier pour $q = q_{ref}$. Ainsi q_{ref} est une racine simple (nécessairement) du numérateur sans être racine du dénominateur. Le profil q admettra donc q_{ref} comme valeur singulière ; il est croissant

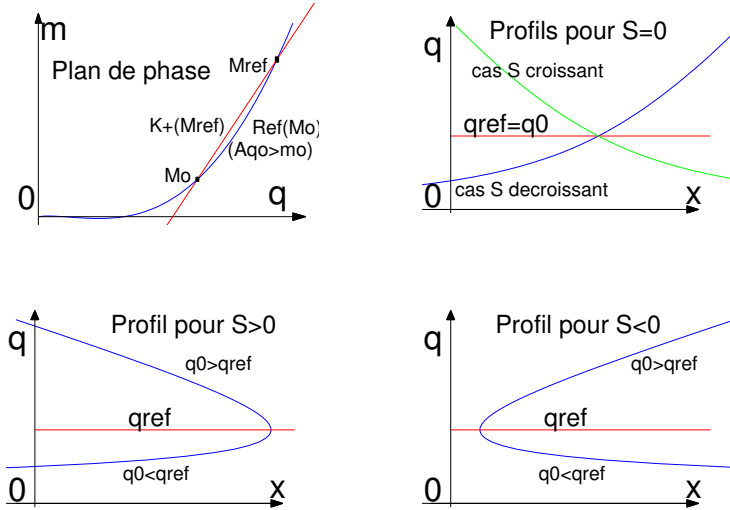
pour $q < q_{ref}$ et décroissant pour $q > q_{ref}$. Le comportement du profil au voisinage de $q = q_{ref}$ est comparable à

$$q = q_{ref} \pm O(\sqrt{x_0 - x})$$

en notant x_0 le point où q prend la valeur q_{ref} . Le profil à prendre en compte à partir de la valeur q_0 ne concerne que des valeurs inférieures à q_{ref} si $q_0 \leq q_{ref}$ et des valeurs supérieures à q_{ref} si $q_0 \geq q_{ref}$. Lorsque $q_0 = q_{ref}$ les deux branches sont possibles, et la détermination provient du contexte de l'application.

Dans le cas où $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$ admet q_0 pour racine, c'est à dire quand $S(q, m)$ est nul en $M_0 = (q_0, m_0)$, la situation est différente suivant que $S(q_{ref}, m_{ref})$ est différent de zéro ou nul. Dans ce dernier cas on se restreindra au cas où $q_{ref} = q_0$.

Si $S(q_{ref}, m_{ref}) > 0$, le profil obtenu est comparable à celui décrit précédemment, avec pour seule différence que q_0 constitue ici une valeur asymptotique correspondant à une limite atteinte lorsque $x \rightarrow -\infty$. Si $S(q_{ref}, m_{ref}) < 0$, la situation est analogue, q_0 constituant une valeur asymptotique atteinte lorsque $x \rightarrow +\infty$.



Lorsque $q_{ref} = q_0$, racine de $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$, la droite passant par M_0 et M_{ref} vient coïncider avec une des caractéristiques $K_+(M_0)$ ou $K_-(M_0)$ suivant le cas. Si $q_0 (= q_{ref})$ est une racine simple de $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$ et qu'en tant que fonction de q , $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$ est croissante au voisinage de q_0 , le profil de q est décroissant. Au contraire, si $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$ est décroissante au voisinage de q_0 , le profil de q est croissant. Ceci est représenté sur la figure ci-dessus.

Si q_0 est une racine double de $S(q, A_{ref}q - B_{ref})$, ce qu'on rencontre quelquefois en pratique, q_0 constitue une valeur asymptotique atteinte à la limite de façon analogue à chacun des deux cas ($S(q, A_{ref}q - B_{ref}) > 0$ ou $S(q, A_{ref}q - B_{ref}) < 0$) précédents. Si q_0 est une racine multiple d'ordre supérieur à 3, la valeur q_0 correspond toujours à une valeur asymptotique, atteinte par valeurs inférieures ou supérieures, suivant l'ordre de multiplicité de la racine, mais il faut ajouter pour ce cas que les applications pratiques sont inexistantes.

5.3.2 Analyse pour les chocs

Etant donnés deux états $M_0 = (q_0, m_0)$, avec $q_0 > 0$, et $M = (q, m)$, ils ne peuvent être reliés par un choc de trajectoire $x = x(t)$ que si la condition de Rankine Hugoniot suivante

$$x'(t) = \frac{m - m_0}{q - q_0} = \frac{F(q, m) - F(q_0, m_0)}{m - m_0},$$

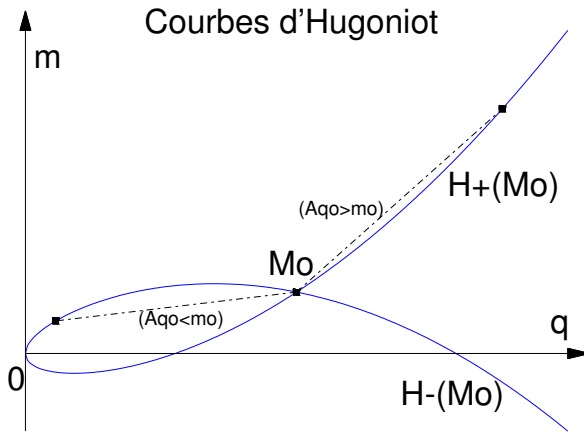
est assurée, avec

$$F(q, m) = \frac{m^2}{q} + P(q) \quad , \quad P(q) = \int_0^q c(\xi)^2 d\xi \quad ,$$

conformément à la section 3.6.1. On en déduit qu'un état M ne peut être relié par un choc à l'état M_0 que s'il appartient à la courbe d'équation

$$m = \frac{q}{q_0} m_0 \pm q (q - q_0) Z(q, q_0) \quad , \quad Z(q, q_0) = \sqrt{\frac{P(q) - P(q_0)}{qq_0 (q - q_0)}} \quad ,$$

appelée courbe d'Hugoniot et notée $H(M_0)$.



Cette courbe est constituée de deux branches notées $H_+(M_0)$ et $H_-(M_0)$, associées à chacune des vitesses caractéristiques $u + c$ et $u - c$ respectivement.

Remarque 5.3.6 La fonction Z étant symétrique, on a

$$M \in H_+(M_0) \iff M_0 \in H_+(M) \text{ et } M \in H_-(M_0) \iff M_0 \in H_-(M) .$$

De plus la branche $H_+(M_0)$ est tangente en M_0 à la droite caractéristique $K_+(M_0)$ et de même la branche $H_-(M_0)$ est tangente en M_0 à la droite caractéristique $K_-(M_0)$.

On s'intéresse à la question suivante : étant donné un état M_0 et une vitesse A (A réel) peut-on caractériser les états M qui peuvent être raccordés à M_0 par un choc de vitesse A ? On utilisera le lemme technique suivant, qui est une conséquence de l'hypothèse d'impédance acoustique strictement croissante.

Lemme 5.3.7 Si l'impédance acoustique $qc(q)$ est une fonction strictement croissante de q , la fonction

$$q \rightarrow qZ(q, q_0)$$

est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante. Si de plus la pression $P(q)$ est non bornée lorsque q devient infini, alors la fonction $qZ(q, q_0)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$, et est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Démonstration L'expression $\sqrt{q}Z(q, q_0) = \sqrt{\frac{q}{q_0} \frac{P(q) - P(q_0)}{q - q_0}}$ tend vers $\frac{\sqrt{P(q_0)^2}}{q_0}$ lorsque q tend vers zéro. On en déduit la continuité de $qZ(q, q_0)$ en $q = 0$ où elle est nulle. Pour montrer la croissance, on étudie

$$q^2 Z(q, q_0)^2 = \frac{q}{q_0 (q - q_0)} \int_{q_0}^q \frac{z(\xi)^2}{\xi^2} d\xi$$

où on a noté $z(\xi) = \xi c(\xi)$ l'impédance acoustique. La fonction $z(\xi)$ est strictement croissante. On obtient en dérivant,

$$\frac{d}{dq} (q^2 Z(q, q_0)^2) = \frac{z(q)^2}{q q_0 (q - q_0)} - \frac{1}{(q - q_0)^2} \int_{q_0}^q \frac{z(\xi)^2}{\xi^2} d\xi .$$

Or on a

$$\int_{q_0}^q \frac{z(\xi)^2}{\xi^2} d\xi < z(q)^2 \int_{q_0}^q \frac{1}{\xi^2} d\xi = \frac{(q - q_0) z(q)^2}{q q_0}$$

que l'on montre en distinguant les deux cas $q > q_0$, pour lequel $z(\xi) < z(q)$ si $\xi < q$, et $q < q_0$ pour lequel $z(\xi) > z(q)$ si $\xi > q$. On en déduit que la dérivée est strictement positive, et donc que $qZ(q, q_0)$ est une fonction strictement croissante de q . Si $P(q)$ tend vers l'infini lorsque q devient infini, on a

$$q^2 Z(q, q_0)^2 = \frac{q}{q q_0 (q - q_0)} (P(q) - P(q_0))$$

qui tend vers l'infini, et donc $qZ(q, q_0)$ tend également vers l'infini. Ainsi, cette expression prend toutes les valeurs entre 0 et l'infini. La bijection se déduit immédiatement de la stricte monotonie.

Remarque 5.3.8 Dans le cas où l'impédance acoustique est majorée par une constante z_0 , ce qui n'est d'aucun intérêt en pratique, on obtient

$$q^2 Z(q, q_0)^2 \leq \frac{q z_0^2}{q_0 (q - q_0)} \frac{q - q_0}{q q_0} = \frac{z_0^2}{q_0^2} .$$

Cette démarche aboutit au théorème suivant.

Théorème 5.3.9 *On suppose la pression $P(q)$ non bornée. Etant donné un état $M_0 = (q_0, m_0)$ avec $q_0 > 0$, et un réel A , il existe un seul état $M = (q, m)$ connectable à M_0 par un choc de vitesse A .*

Démonstration. On doit pouvoir assurer que la vitesse A , c'est à dire

$$\frac{m - m_0}{q - q_0} = A \quad , \quad \text{ou} \quad m = A(q - q_0) + m_0 \quad ,$$

et l'appartenance à la courbe d'Hugoniot

$$m = \frac{q}{q_0} m_0 \pm q(q - q_0) Z(q, q_0) \quad .$$

En éliminant m on obtient

$$Aq_0 - m_0 = \pm q q_0 Z(q, q_0) \quad .$$

Si $Aq_0 - m_0 > 0$, le choix du signe $+$ s'impose et q correspond à la seule valeur pour laquelle

$$q Z(q, q_0) = A - \frac{m_0}{q_0} \quad ,$$

et $M \in H_+(M_0)$. Si $Aq_0 - m_0 < 0$, le choix du signe $-$ s'impose et q correspond à la seule valeur pour laquelle

$$q Z(q, q_0) = -A + \frac{m_0}{q_0} \quad ,$$

et $M \in H_-(M_0)$.

Proposition 5.3.10 *On pose $B = Aq_0 - m_0$, et on considère la valeur de référence q_{ref} telle que*

$$q_{ref} c(q_{ref}) = |B| \quad .$$

On a alors

$$q_{ref} c(q_{ref}) = \sqrt{\frac{q q_0}{q - q_0} \int_{q_0}^q c(\xi)^2 d\xi} \quad .$$

La démonstration se déduit immédiatement de la précédente.

Il reste à vérifier si le choc ainsi obtenu est bien compatible avec la condition d'entropie. Ceci dépend du sens dans lequel le profil passe de la valeur q_0 à la valeur q , de façon croissante ou décroissante relativement à la variable x . Sous l'hypothèse un peu plus restrictive de la croissance de la fonction $c(q)$ on peut obtenir quelques précisions.

Dans le cas où $B = Aq_0 - m_0 > 0$, on remarque que la dérivée de la vitesse caractéristique $u + c(q) = A - \frac{B}{q} + c(q)$ s'écrit

$$\frac{d}{dq} (u + c(q)) = \frac{B}{q^2} + c'(q) > 0 \quad ,$$

et la condition d'entropie n'autorise que des chocs décroissants. Ceci correspond à tous les points de la branche $H_+(M_0)$ de la courbe d'Hugoniot.

Dans le cas où $B = Aq_0 - m_0 < 0$, on remarque que la dérivée de la vitesse caractéristique $u - c(q) = A - \frac{B}{q} - c(q)$ s'écrit

$$\frac{d}{dq}(u - c(q)) = \frac{B}{q^2} - c'(q) < 0 ,$$

et la condition d'entropie n'autorise que des chocs décroissants. Ceci correspond à tous les points de la branche $H_-(M_0)$ de la courbe d'Hugoniot.

5.4 De l'écoulement de l'air à l'acoustique : la génération du son

L'écoulement de l'air dans un tuyau est régi par les équations de l'hydrodynamique déjà introduites au paragraphe 4-3-2. Pour un instrument de musique (instrument à vent, bien entendu) l'aire de la section est variable en fonction de l'abscisse (curviligne pour un instrument enroulé) $x \in [0, L]$, L étant la longueur du tuyau (déroulé le cas échéant). Cette aire est notée $a(x)$. Il s'agit d'une fonction régulière, croissante et strictement positive sur $[0, L]$. La densité de l'air est supposée constante sur chaque section d'abscisse x et est notée $\rho(x, t)$ à l'instant t . De même la vitesse est supposée constante sur chaque section d'abscisse x et est notée $u(x, t)$ à l'instant t . Cette vitesse est positive en général, et on la supposera telle pour la construction du modèle.

En considérant un petit intervalle de longueur Δx centré en x , on y fait un bilan de masse, entre les instants t et $t + \Delta t$, avec Δt petit également, en comptabilisant les masses entrantes et sortantes. On obtient

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) a(x) \Delta x &= \rho(x, t) a(x) \Delta x - \rho(x, t) a(x) u(x, t) \Delta t \\ &+ \rho(x - \Delta x, t) a(x - \Delta x) u(x - \Delta x, t) \Delta t + \Delta t \Delta x \epsilon(\Delta x, \Delta t) \end{aligned}$$

où $\epsilon(\Delta x, \Delta t)$ est un module de continuité, qui tend vers zéro lorsque Δx et Δt tendent vers zéro. On divise par $\Delta x \Delta t$ pour obtenir

$$a(x) \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} + \frac{\rho(x, t) a(x) u(x, t) - \rho(x - \Delta x, t) a(x - \Delta x) u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \epsilon(\Delta x, \Delta t)$$

ce qui donne à la limite lorsque Δx et Δt tendent vers zéro,

$$a(x) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho a u) = 0 . \quad (4.1)$$

En posant

$$q = \rho a \quad , \quad m = q u \quad ,$$

on obtient l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 .$$

L'équation dynamique associée est de la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 ,$$

où $S(q, m)$ est un terme source à préciser et c correspond effectivement à la vitesse du son. Elle peut être exprimée de deux façons différentes, comme on l'a vu en section 4.4.1 :

-soit par la loi de Boyle Mariotte, qui correspond à une loi isothermale, avec

$$P(\rho) = K_0 \rho T ,$$

où $K_0 = 287.06$ est une constante, exprimée ici en unités M.K.S. et T est la température, exprimée en degrés Kelvin. L'expression de la vitesse du son est alors

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{\gamma P(\rho)}{\rho}} = \sqrt{\gamma K_0 T} .$$

L'hypothèse "isothermale" revient à supposer cette expression constante, ce qui est une hypothèse classique en acoustique.

- soit par la loi isentropique utilisée classiquement pour les équations d'Euler, qui conduit à

$$P(\rho) = K \rho^\gamma$$

où $\gamma = 1.4$, est la constante adiabatique habituelle, et K une constante valant $K = 69259.5$ lorsque la pression est exprimée en Pascals. L'expression de la vitesse du son est alors

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{\gamma P(\rho)}{\rho}} = \sqrt{\gamma K} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} .$$

A l'équilibre, c'est à dire à vitesse nulle, au repos (toutes les dérivées en temps sont nulles) et à pression constante, l'équation dynamique se réduit à

$$c(\rho)^2 \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, 0) = 0 .$$

Or la pression constante implique

$$\frac{\partial P}{\partial x} = c(\rho)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 ,$$

et il reste

$$c(\rho)^2 a'(x) \rho + S(q, 0) = 0 .$$

On obtient

$$S(q, 0) = \begin{cases} -c_0^2 q \frac{a'(x)}{a(x)} & (cas \ isothermal) \\ -\gamma K q^\gamma \frac{a'(x)}{a(x)^\gamma} & (cas \ isentropique) \end{cases}$$

et on prendra un terme source de la forme

$$S(q, m) = S(q, 0) + k \left| \frac{m}{q} \right| \frac{m}{q} .$$

En pratique on préfère privilégier le cas isentropique, mais on conservera le cas isothermique pour exprimer la vitesse du son, qui devient ainsi une constante

$$c(\rho) = c_0 = \sqrt{\gamma K_0 T} .$$

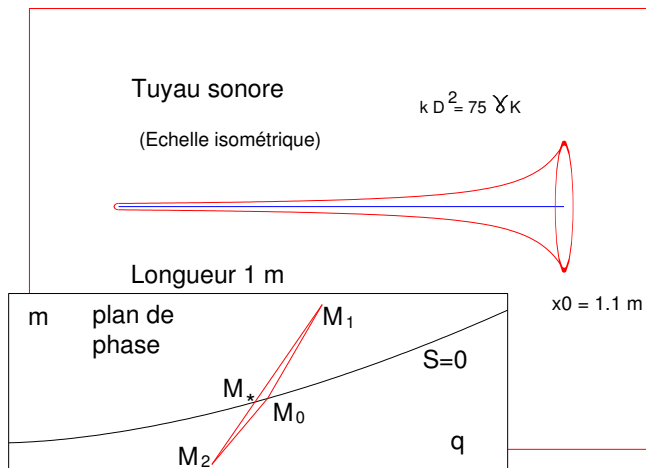
Ce choix traduit l'hypothèse qu'en acoustique les variations de température sont infimes, mais que des variations de pressions restent sensibles, ce qui est exprimé par le terme en q^γ dans le terme source. Ce choix permet surtout de lever l'ambiguïté de la dépendance de $c(\rho)$ par rapport à q et donc à la variable x .

L'équation dynamique associée prend ainsi la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c_0^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} - \gamma K q^\gamma \frac{a'(x)}{a(x)^\gamma} + k |u| u = 0 ,$$

où on constate que l'incidence de x ne porte plus que sur l'expression

$$\frac{a'(x)}{a(x)^\gamma} .$$



Nous allons faire une hypothèse qui va paraître surprenante au premier abord, qui consiste à supposer cette expression constante, en écrivant

$$\frac{a'(x)}{a(x)^\gamma} = \text{Constante (notée } k \frac{D^2}{\gamma K}) .$$

En effet, en intégrant cette équation différentielle, on obtient

$$a(x) = \left(\frac{\gamma K}{(\gamma - 1) k D^2 (x_0 - x)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

qui correspond effectivement au profil des instrument à vent lorsque $x_0 > L$. La figure précédente présente un profil de tuyau sonore réalisant cette propriété ; le rayon a été calculé à partir de l'aire par

$$r(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{\pi}}.$$

On constate que ce profil correspond effectivement aux formes habituelles des instruments à vent. Avec x_0 plus proche de L , on observe une plus grande ouverture, et cette ouverture se réduit lorsque x_0 s'éloigne de la valeur L . On passe ainsi du profil d'un cor à celui d'une trompette puis d'une clarinette, en adaptant les valeurs de L , x_0 et de la constante $k D^2$. On y présente également les racines du dénominateur de la fonction de profil inverse, étudiée dans la suite, pour la même valeur de D , c'est à dire $D = 2696.71$, $k = 1$, donc $k D^2 = 75 \gamma K$ dans cet exemple. Comme on souffle toujours du même côté de l'instrument, on peut supposer que la vitesse est toujours positive : $u > 0$. L'équation dynamique est maintenant de la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 u \frac{\partial m}{\partial x} + (c_0^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + k (u^2 - D^2 q^\gamma) = 0,$$

où le terme source ne dépend plus que de q et de m . On a retrouvé la situation qui permet de reconstituer les profils d'onde par des droites de la forme

$$m = A q - B,$$

à partir d'un état de référence $M_* = (q_*, m_*)$ donnant ici

$$A = \frac{m_*}{q_*} + c_0 = u_* + c_0, \quad B = q_* c_0.$$

Le profil est déterminé par l'équation

$$\frac{B^2 - q^2 c_0^2}{k ((Aq - B)^2 - D^2 q^{\gamma+2})} \frac{\partial q}{\partial x} = 1.$$

La valeur de référence q_* est une valeur possible pour q , qui annule le numérateur. Pour éviter un profil vertical, il est nécessaire que q_* soit aussi une racine du dénominateur. On obtient ainsi une caractérisation de m_* et de u_* , en effet

$$m_* = u_* q_* = D q_*^{\frac{\gamma}{2}+1}, \quad u_* = D q_*^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Si on considère que q_* est l'état avant le passage de l'onde, le profile du front de l'onde sera déterminé par la droite

$$m = (u_* + c_0) q - c_0 q_*.$$

Si $q > q_*$, le terme source est positif et le numérateur est négatif. Si $q < q_*$, le terme source est négatif et le numérateur est positif. Dans les deux cas

$$\frac{\partial q}{\partial x} < 0 ,$$

et le profil est décroissant. Il est déterminé par l'équation

$$\frac{c_0^2 (q^2 - q_*^2)}{k ((u_* + c_0) q - c_0 q_*)^2 - D^2 q^{\gamma+2}} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

où il faut tenir compte d'une simplification par le terme $(q - q_*)$ dans le coefficient.

On note q_1 la valeur maximale qu'atteindra le profil. L'arrière de l'onde correspond à un profil croissant, passant de la valeur q_* à cette valeur q_1 , la valeur q_* ne pouvant être atteinte que de façon asymptotique. Pour cette portion du profil l'état de référence est $M_1 = (q_1, m_1)$, situé sur la droite précédente (d'équation $m = (u_* + c_0) q - c_0 q_*$) et donc

$$m_1 = (u_* + c_0) q_1 - c_0 q_* .$$

Cette portion du profil est déterminée par la droite

$$m = (u_1 + c_0) q - c_0 q_1 ,$$

et par l'équation

$$\frac{c_0^2 (q^2 - q_1^2)}{k ((u_1 + c_0) q - c_0 q_1)^2 - D^2 q^{\gamma+2}} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 .$$

La droite d'équation

$$m = (u_1 + c_0) q - c_0 q_1$$

rencontre la courbe des racines du terme source en un point qui ne peut être atteint à distance finie.

Le profil de l'onde est constitué d'un front décroissant, passant de la valeur q_1 à la valeur q_* , suivi d'une onde de raréfaction croissante, provenant de l'asymptote de valeur q_0 pour atteindre la valeur q_1 . La figure suivante présente dans une première fenêtre le calcul de q_1 et de q_2 à partir des données q_* et q_0 ($q_* < q_0$) correspondant aux deux racines de l'équation en q ,

$$q + \frac{q_* q_0}{q} = \frac{q_0}{c_0} \left(u_* + 2c_0 - D q_0^{\frac{\gamma}{2}} \right) ,$$

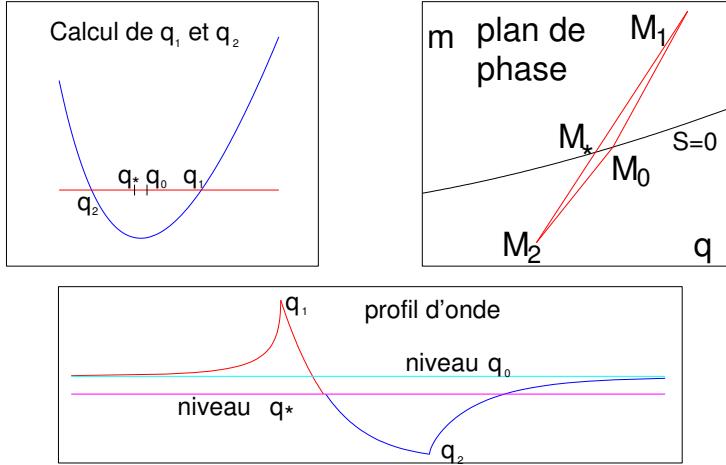
elle même obtenue en exprimant que

$$M_1 \in \{ m = (u_* + c_0) q - c_0 q_* \} , \quad M_2 \in \{ m = (u_* + c_0) q - c_0 q_* \} ,$$

et

$$M_0 \in \{ m = (u_1 + c_0) q - c_0 q_1 \} \cap \{ m = (u_2 + c_0) q - c_0 q_2 \} \cap \{ Source = 0 \} .$$

Une représentation géométrique en est donnée dans une seconde fenêtre. Enfin le profil lui même est représenté dans une troisième fenêtre (contour rouge).



Lorsqu'une onde parvient à l'extrémité de l'instrument, elle subit une dépression instantanée qui provoque une réflexion et un retour vers l'intérieur de l'instrument. Le son est maintenu en apportant l'énergie nécessaire à fixer la valeur de q_0 de telle façon que la longueur de l'instrument soit un multiple de la longueur d'onde de l'onde ainsi obtenue. Après le passage de la première onde, les suivantes comportent un profil complété par le contour bleu, qui décroît de la valeur q_* à la valeur q_2 pour se redresser ensuite et atteindre asymptotiquement la valeur q_0 . On peut construire un train d'onde en concaténant plusieurs fois ce profil.

Ce profil présente une partie décroissante pour une onde progressive, de vitesse $u_* + c_0 > 0$, qui ne se transforme pas en choc. Ceci ne peut pas arriver dans un cas homogène, et est donc une particularité due au terme source. Par contre on peut se poser la question inverse, de l'apparition d'un choc, lorsque M_1 et M_2 sont reliés par une onde de choc. On peut construire le point M_0 dans le plan de phase, à l'intersection des droites passant par M_2 , de pente $u_2 + c_0$ et par M_1 , de pente $u_1 + c_0$. On obtient

$$m_0 = (u_1 + c_0) q_0 - c_0 q_1 = (u_2 + c_0) q_0 - c_0 q_2 ,$$

dont on déduit

$$\frac{u_2 - u_1}{q_2 - q_1} = \frac{c_0}{q_0} .$$

Or la relation de Rankine Hugoniot s'écrit, dans le cas présent,

$$\frac{u_2 - u_1}{q_2 - q_1} = Z(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{P(q_2) - P(q_1)}{q_1 q_2 (q_2 - q_1)}} = \frac{c_0}{\sqrt{q_1 q_2}} ,$$

car $P(q) = c_0^2 q$ pour notre modèle. On en déduit

$$q_0 = \sqrt{q_1 q_2} .$$

Par ailleurs, les points M_1 et M_2 sont tous les deux situés sur le droite passant par M_* et de pente $u_* + c_0$. On a donc

$$u_1 = u_* + c_0 - c_0 \frac{q_*}{q_1} , \quad u_2 = u_* + c_0 - c_0 \frac{q_*}{q_2} ,$$

donc

$$u_2 - u_1 = c_0 q_* \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) = c_0 q_* \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} ,$$

d'où

$$\frac{u_2 - u_1}{q_2 - q_1} = c_0 \frac{q_*}{q_1 q_2} .$$

On en déduit

$$\frac{q_*}{q_1 q_2} = \frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}} ,$$

d'où

$$q_* = \sqrt{q_1 q_2} = q_0 .$$

Les points M_* et M_0 sont confondus, donc aussi M_1 et M_2 .

5.5 Ainsi coule une rivière

Une première application, en hydraulique, correspond à la prise en compte de la pente et de la friction, pour étudier un écoulement d'eau en dimension 1 d'espace, par exemple d'une rivière. L'équation de conservation de la masse reste inchangée,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement est modifiée par le terme source

$$S(q, m) = g p q + k \left| \frac{m}{q} \right| \frac{m}{q} ,$$

où p représente la pente et k est un coefficient de friction ($k > 0$), pour devenir

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c(q)^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + g p q + k |u| u = 0 ,$$

avec toujours $c(q) = \sqrt{gq}$ et $m = qu$. Les paramètres p et k sont sans dimension. On remarque que le terme source n'admet de racines que lorsque la pente p et la vitesse u sont de signes contraires.

On suppose que la rivière coule d'est en ouest, ce qui revient à prendre $p > 0$ et à attendre des valeurs négatives de la vitesse u .

Lorsque $u < 0$, le terme source s'annule lorsque

$$gpq = k u^2$$

ou encore

$$\frac{|u|}{c(q)} = \frac{-u}{c(q)} = \sqrt{\frac{p}{k}}$$

c'est à dire lorsque $\sqrt{\frac{p}{k}}$ est égal au nombre de Froude de l'écoulement.

Une classification des régimes fluviaux a été proposée en 1970 par Peter W. Herbertson, en fonction du nombre de Froude et de la pente. Elle est reprise dans le tableau suivant.

Terminologie	nombre de Froude	pente
pente douce	$F < 0.25$	$ p < 10^{-3}$
pente modérée	$0.25 < F < 0.5$	$10^{-3} < p < 4 \cdot 10^{-3}$
pente raide	$F > 0.5$	$ p > 4 \cdot 10^{-3}$

Notons que cette représentation ne concerne que les "eaux vives", comme les rivières, et non les "eaux dormantes", comme les lacs. Nous allons montrer une relation effective entre le nombre de Froude, la pente et la friction.

Définition 5.5.1 *Sur une pente constante, une rivière est dite **en équilibre** lorsque sa surface est parallèle au fond.*

Théorème 5.5.2 *Une rivière en équilibre correspond à un nombre de Froude F nécessairement donné par*

$$F = \sqrt{\frac{p}{k}}.$$

Démonstration : Ayant $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, compte tenu de l'équation du profil, on doit imposer une indétermination en rendant nul le dénominateur, c'est à dire en écrivant

$$\frac{|u|}{c(q)} = \sqrt{\frac{p}{k}}$$

d'où le résultat.

Corollaire 5.5.3 *La donnée de la profondeur de référence détermine complètement l'écoulement d'une rivière en équilibre.*

En effet, la donnée de q_* détermine $c(q_*)$, et connaissant le nombre de Froude, on en déduit la vitesse de référence.

Remarque 5.5.4 *Sur le plan expérimental, les mesures de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement sont relativement faciles à réaliser. La mesure de la pente p l'est également. La mesure du coefficient de friction est par contre beaucoup plus difficile. Le théorème précédent constitue un moyen efficace pour déduire la valeur du coefficient de friction k des valeurs de la pente p et du nombre de Froude F_* par la formule*

$$k = \frac{p}{F_*^2} .$$

Le théorème précédent est surtout important pour les applications pratiques qu'il autorise. Il reste à exprimer la vitesse A . On l'obtient en évaluant u par

$$-u = -A + \frac{B}{q} = \sqrt{\frac{p}{k}} c(q)$$

d'où

$$A = - \frac{q_* c(q_*)}{q} - \sqrt{\frac{p}{q}} c(q) ,$$

qui correspond bien à une vitesse d'onde de la forme $\lambda_1 = u - c$, ce qui est attendu, l'onde allant vers l'ouest, c'est à dire vers les $x < 0$. En prenant $q = q_*$, on obtient

$$A = - \left(1 + \sqrt{\frac{p}{k}} \right) c(q_*) = - (1 + F_*) c(q_*) .$$

La vitesse u est donnée par

$$u = - (1 + F_*) c(q_*) + \frac{q_* c(q_*)}{q} ,$$

dont l'expression se réduit pour $q = q_*$ à

$$u_* = u(q_*) = -F_* c(q_*) .$$

Notons que cette vitesse u_* est toujours négative bien que la vitesse u puisse changer de signe, pour de très petites valeurs de q par exemple. De son côté, la vitesse d'onde A est toujours négative.

Remarque 5.5.5 *Le signe du coefficient B a été choisi de telle façon d'avoir $B < 0$ pour une onde de vitesse $\lambda_1 = u - c$, et $B > 0$ pour une onde de vitesse $\lambda_2 = u + c$.*

On peut reprendre tous ces résultats dans l'énoncé suivant, en adoptant la notation

$$\lambda = \sqrt{\frac{|p|}{k}} .$$

Théorème 5.5.6 *Un état $M_* = (q_*, m_*)$ est à l'équilibre lorsque son nombre de Froude est égal à λ , c'est à dire*

$$|m_*| = \lambda q_* c(q_*) .$$

Plus précisément, M_* est un état de référence pour la droite d'équation $m = Aq - B$ telle que

$$\text{si } Aq_* - m_* > 0, \text{ alors } B = q_* c(q_*) , \ A = (1 + \lambda) c(q_*) , \ m_* = \lambda q_* c(q_*) ,$$

ou

$$\text{si } Aq_* - m_* < 0, \text{ alors } B = -q_* c(q_*) , \ A = -(1 + \lambda) c(q_*) , \ m_* = -\lambda q_* c(q_*) .$$

Considérons maintenant un choc dont la valeur de référence est q_* , reliant deux états $M_0 = (q_0, m_0)$ et $M = (q, m)$. D'après l'étude précédente, les valeurs de profils q , q_0 et q_* sont liées par la relation

$$q_* = \left(\frac{q + q_0}{2} q q_0 \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Si $B > 0$, et comme $c(q)$ est une fonction croissante, le choc doit être décroissant, et ce cas correspond à une vitesse caractéristique de propagation $u + c(q)$. Si $B < 0$, au contraire, le choc doit être croissant, ce cas correspondant à une vitesse caractéristique de propagation $u - c(q)$. De plus, on a ici

$$Z(q, q_0) = \sqrt{g \frac{q + q_0}{2q q_0}} ,$$

et la courbe d'Hugoniot a pour équation

$$m = q \frac{m_0}{q_0} \pm q (q - q_0) \sqrt{g \frac{q + q_0}{2q q_0}} .$$

Nous allons utiliser ces notions pour construire plusieurs modèles de vagues utilisant le système de Saint-Venant.

5.6 La modélisation des Roll Waves

Les Roll Waves sont des vagues que l'on peut observer lors d'un écoulement dans un canal incliné avec une pente suffisamment forte et présentant une friction réduite. C'est le cas de canalisations en béton ou métalliques utilisées dans les centrales hydrauliques en montagne, pour amener l'eau du barrage aux turbines. On les retrouvent dans d'autres circonstances, comme dans le ruisseau qui suit une rue en pente ou lors d'un écoulement sur un plan incliné, comme par exemple un toit assez lisse. Dans chaque cas le rapport $|p|/k$ entre la pente et la friction doit être suffisamment grand. Le système de Saint-Venant est bien adapté à la modélisation de ces Roll Waves, et notamment exigera un rapport entre la pente et la pression tel que

$$\frac{|p|}{k} > 4 .$$

Ceci impose pour un état de référence à l'équilibre, un nombre de Froude supérieur à 2; en effet

$$F_* = \lambda = \sqrt{\frac{|p|}{k}} > 2 .$$

On se place dans le contexte suivant : l'écoulement descend un plan incliné en allant de gauche à droite. La pente p est donc négative et la vitesse de l'onde sera vraisemblablement positive.

Les équations de Saint-Venant s'écrivent donc sous la forme suivante

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (gq - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + k(u^2 - \lambda^2 gq) = 0 \quad .$$

On note $M_* = (q_*, m_*)$ un état de référence de l'écoulement qui soit à l'équilibre, ce qui implique les conditions

$$\lambda = \frac{u_*}{q_*} = \frac{m_*}{q_* c(q_*)} \quad , \quad \text{ou} \quad m_* = \lambda q_* c(q_*) \quad .$$

La droite caractéristique associée à $K_+(M_*)$, d'équation $m = Aq - B$ est telle que

$$B = q_* c(q_*) \quad , \quad A = (1 + \lambda) c(q_*) \quad .$$

l'équation de profil s'écrit

$$\frac{g q_*^3 - g q^3}{k \left(((1 + \lambda)q - q_*)^2 - \lambda^2 g q^3 \right)} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \quad ,$$

et en posant $q = \xi q_*$, on obtient

$$\frac{1 - \xi^3}{k \left(((1 + \lambda)\xi - 1)^2 - \lambda^2 \xi^3 \right)} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \quad .$$

Comme $\xi = 1$ est une racine commune au numérateur et au dénominateur, il reste

$$\frac{1 + \xi + \xi^2}{k \left(\lambda^2 \xi^2 - (1 + 2\lambda)\xi + 1 \right)} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \quad .$$

Le profil de la vague, d'après la section précédente, est constitué d'un choc nécessairement décroissant, de vitesse A , précédé et suivi de deux profils réguliers, également de vitesse A .

On note $M_g = (q_g, m_g)$ la valeur du profil à gauche du choc, et $M_d = (q_d, m_d)$ sa valeur à droite du choc. On a nécessairement

$$q_d < q_* < q_g \quad , \quad M_g \in K_+(M_*) \quad , \quad M_d \in K_+(M_*) \quad , \quad M_d \in H_+(M_g) \quad .$$

D'après l'étude dans le plan de phase, pour avoir un profil régulier croissant il est nécessaire que

$$M_d \in S_+ = \{ (q, m) \mid m^2 - \lambda^2 g q^3 > 0 \}$$

et

$$M_g \in S_- = \{ (q, m) \mid m^2 - \lambda^2 g q^3 < 0 \} \quad .$$

Ainsi, la droite d'équation $m = Aq - B$ doit traverser la courbe $S_0 = \{ m = \lambda \sqrt{gq} \, q \}$ des états d'équilibre, en allant de S_+ vers S_- . Il faut donc que la tangente en M_0 à S_0 soit de pente supérieure à la pente de la droite, c'est à dire A , ce qui se traduit, en comparant les dérivées, par

$$\frac{3}{2} \lambda \sqrt{gq_*} > A = (1 + \lambda) \sqrt{gq_*} \quad ,$$

qui se réduit à $\frac{3}{2} \lambda > 1 + \lambda$ c'est à dire

$$\lambda > 2 .$$

Ceci constitue la condition attendue sur la pente de l'écoulement.

Le dénominateur dans l'équation de profil admet deux autres racines :

$$\xi_1 = \frac{1 + 2\lambda - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2 \lambda^2} \quad et \quad \xi_2 = \frac{1 + 2\lambda + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2 \lambda^2} ,$$

qui sont toutes les deux inférieures à 1 lorsque $\lambda > 2$. Après une décomposition en éléments simples il devient maintenant facile d'intégrer l'équation de profil. On obtient, en posant

$$q_1 = \xi_1 q_* \quad , \quad q_2 = \xi_2 q_*$$

l'expression

$$\frac{q}{k\lambda^2} + \frac{a q_*}{k} \ln(q - q_1) + \frac{b q_*}{k} \ln(q - q_2) = x - At + Cte ,$$

où

$$a = - \frac{1 + \xi_1 + \xi_1^2}{\sqrt{1 + 4\lambda}} \quad , \quad b = \frac{1 + \xi_2 + \xi_2^2}{\sqrt{1 + 4\lambda}} .$$

La figure suivante représente un profil de Roll-Wave obtenu sur une pente correspondant à $p = -0.09$ et une friction de coefficient $k = 0.01$, ce qui donne $\lambda = 3$. La profondeur de référence est $q_* = 2m$, et les valeurs maximales et minimales au niveau du choc

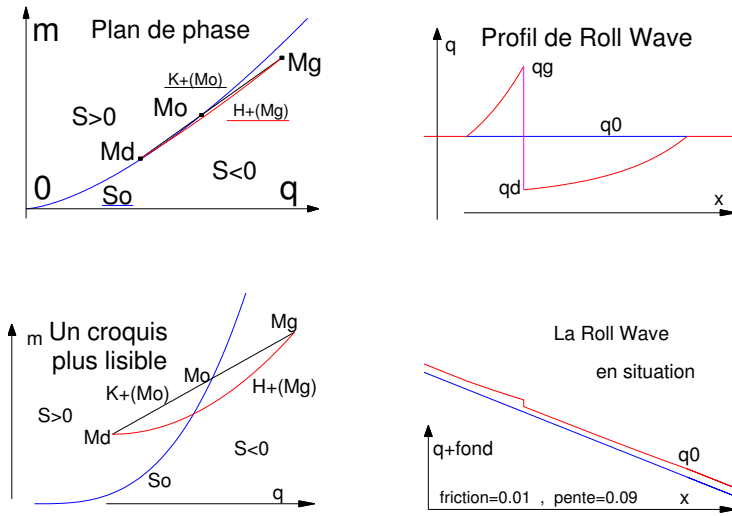
sont respectivement $qg = 2.91m$ (noté q_2) et $qd = 1.30m$, (noté q_1) soit un saut de $1.61m$ ce qui est relativement important.

Le profil de l'onde est distribué sur une longueur de 233.52 mètres, et seule la dénivelée au niveau du choc est vraiment perceptible. La vitesse de l'onde est de 17.715 mètres par secondes, soit 63.773 km/h.

Il est important de remarquer, pour ce qui concerne l'étude dans le plan de phase, que l'état M_d est très proche de la courbe S_0 qui représente le lieu où le terme source S est nul. Il est cependant bien inclus dans l'ensemble $\{S > 0\}$ situé au dessus de la courbe S_0 . Un croquis plus lisible est proposé pour mieux se rendre compte de la démarche dans le plan de phase.

Dans la seconde colonne, on a représenté le profil de l'onde, qui permet de constater en particulier que la moyenne de ce profil au niveau de l'onde n'est pas du tout égale à q_0 . Elle en est bien inférieure. Ceci pourrait d'ailleurs permettre d'expliquer la création de ces Roll-Waves, par un déficit intermittent de masse sur un petit intervalle qui provoquerait à terme la constitution de ce type de profil. On donne ensuite une représentation du profil en situation, sur la pente, et il est alors difficile de deviner le profil de l'onde, sauf évidemment au niveau de la discontinuité. La valeur minimale correspond à $q_2 = 1.18m$.

Pour de plus petites valeurs de q_0 , tout ces chiffres se trouvent diminués, et de façon proportionnelle en ce qui concerne les hauteurs des profils.



5.7 La modélisation des Rogue Waves

Le phénomène de Rogue Waves, ou de vagues scélérates est un phénomène éphémère qui apparaît dans l'océan hauturier, sous la forme d'une vague gigantesque et dévastatrice, parce qu'elle accumule une quantité importante d'énergie. On peut également parler de lame de fonds à une échelle plus petite. On propose ici un modèle hydraulique, exploitant les équations de Saint Venant, en se limitant à une seule dimension d'espace, dans le sens de la propagation de la vague, et en considérant que les mouvements latéraux au niveau de la vague sont uniformes. La validité de ce modèle exige une grande longueur d'onde, particulièrement en océan profond. Bien entendu, la vague elle-même est de faible longueur d'onde, mais le phénomène global met en oeuvre l'interaction de deux vagues de grandes longueurs d'onde, et de relativement faible amplitude.

On note H la profondeur de l'océan et c_s la vitesse sonique des ondes dans l'eau (c'est à dire $c_s = 1647 \text{ m.s}^{-1}$), la longueur d'onde λ_w de ces vagues doit satisfaire à une condition de la forme

$$\lambda_w \geq 2 N \frac{H \sqrt{gH}}{c_s} ,$$

où g est la constante de gravité. Cette condition traduit le fait que sur la distance (horizontale) d'une longueur d'onde λ_w , il y a au moins N interactions soniques entre le fond et la surface. Le modèle de Saint-Venant est d'autant plus valable que N est grand. En pratique, on exige $N \geq 25$, ce qui induit par exemple une longueur d'onde supérieure à 21400 m pour une profondeur de 3700 m de l'océan. On suppose, pour fixer les idées, que la propagation se fait d'Ouest en Est.

5.7.1 La configuration initiale du modèle

On

note toujours q la profondeur de l'océan, et m son débit, u la vitesse de l'eau, avec

$$m = q u ,$$

puis

$$c = \sqrt{gq} \quad (= c(q))$$

la vitesse des vagues. On tient compte de la friction, de coefficient $k > 0$ (Strickler), mais à la différence de ce qui précède, et dans le seul but de simplifier l'exposé, on suppose que le fond est plat (pente nulle, $p = 0$, d'où $\lambda = 0$). Dans cette configuration, et en notant x la variable d'espace et t le temps, le modèle de Saint-Venant s'écrit

$$q_t + m_x = 0 , \quad (7.1)$$

$$m_t + 2u m_x + (c^2 - u^2) q_x + k |u| u = 0 . \quad (7.2)$$

Le terme source est ici $S = k |u| u$, et $u = 0$ correspond à une racine double. On sait que les différents états d'une même onde sont décrits par une droite

$$m = A q - B , \quad (7.3)$$

dans le plan de phase (q, m) . Le paramètre A est une constante qui correspond à la vitesse de l'onde, de la forme $A = u_{ref} - c(q_{ref})$ ou $A = u_{ref} + c(q_{ref})$ suivant que l'onde va d'Est en Ouest (signe $-$) ou d'Ouest en Est (signe $+$), et pour un état de référence $M_{ref} = (q_{ref}, m_{ref})$ donné, avec $m_{ref} = q_{ref} u_{ref}$, bien entendu. Le paramètre B est constant lui aussi, et est déterminé par l'état de référence : $B = m_{ref} + A q_{ref}$. On note M_0 l'état de l'océan à l'Ouest, à une distance suffisamment grande pour être réputée infinie, et M_* l'état de l'océan à l'Est, à une distance assez grande elle aussi, pour être réputée infinie. Dans les deux cas, ces distances sont supérieures à la longueur d'onde de référence λ_w mentionnée plus haut, pour justifier l'utilisation du modèle de Saint-Venant. Ces deux états correspondent à des vitesses nulles (ceci est lié à l'hypothèse simplificatrice de pente nulle du fond de l'océan); ainsi M_0 représente un état $M_0 = (q_0, 0)$ et M_* représente un état $M_* = (q_*, 0)$. On fait l'hypothèse

$$q_0 > q_* .$$

Il suffit en pratique que l'inégalité porte sur une différence $q_0 - q_*$ de quelques dizaines de centimètres, même lorsque l'océan est de grande profondeur. Le profil de l'état initial est constitué de deux branches qui se rejoignent en un état $P = (q_P, m_P)$ par exemple en $x = 0$, ce qui constitue le choix de l'origine. De l'état P à l'état M_* , c'est à dire du côté Est, le profil est décroissant, caractérisé par l'état de référence M_* . Les états sont donc situés sur la droite

$$m = c_* (q - q_*) ,$$

avec $c_* = c(q_*) = \sqrt{gq_*}$. On a en effet $A = c_*$ et $B = c_* q_*$ pour cette partie du profil. L'expression du profil est obtenue en inversant la relation de profil

$$\psi_E(q) = x , \quad (7.4)$$

l'indice E indiquant l'Est. Le profil inverse $\psi_E(q)$ étant déterminé par

$$\psi'_E(q) = \frac{B^2 - c^2 q^2}{k |Aq - B| (Aq - B)} , \quad \psi_E(q_P) = 0 .$$

On a nécessairement $q_* < q_0 < q_P$, pour assurer la croissance de la partie Ouest du profil, puis la décroissance de la partie Est. On aura donc un flux positif : $Aq - B = c_*(q - q_*) > 0$, et en posant $\xi = \frac{q}{q_*}$ il vient

$$\psi'_E(q) = \frac{1 - \xi^3}{k (1 - \xi)^2} = \frac{1 + \xi + \xi^2}{k (1 - \xi)} = \frac{1}{k} \left(\frac{3}{1 - \xi} - 2 - \xi \right) ,$$

d'où

$$\psi_E(q) = -\frac{3q_*}{k} \ln \left(\frac{q - q_*}{q_P - q_*} \right) + \frac{2}{k} (q_P - q) + \frac{1}{2kq_*} (q_P^2 - q^2) .$$

L'inversion de cette fonction, compte tenu de $\psi_E(q) = x$, permet d'exprimer q comme une fonction décroissante de la variable x et valant q_P lorsque $x = 0$. Dans la partie Ouest du profil (qu'on indique par un indice W), l'état de référence $M_{ref} = (q_{ref}, m_{ref})$ doit correspondre à une profondeur vérifiant

$$q_{ref} \geq q_P (\geq q_0) ,$$

pour assurer la croissance du profil. En effet, la vitesse de référence associée à l'état M_{ref} c'est à dire

$$A_{ref} = \frac{m_{ref}}{q_{ref}} + c_{ref} , \quad \text{avec } c_{ref} = c(q_{ref}) = \sqrt{gq_{ref}} ,$$

est aussi la vitesse du profil Ouest de l'onde, et est positive. La droite représentant ce profil dans l'espace des phases est de la forme

$$m = m_{ref} + A_{ref} (q - q_{ref}) ,$$

et elle passe par l'état $M_0 = (q_0, 0)$. On a donc

$$m_{ref} = A_{ref} (q_{ref} - q_0) , \quad B_{ref} = c_{ref} q_{ref} .$$

Le profil inverse est déterminé par une fonction ψ_W vérifiant

nt

$$\psi'_W(q) = \frac{B_{ref}^2 - c^2 q^2}{k (A_{ref}q - B_{ref})^2} , \quad \psi_W(q_P) = 0 ,$$

avec $q_0 \leq q_P \leq q_{ref}$. Le profil initial de l'onde est ensuite obtenu en résolvant point par point

$$\psi_W(q) = x . \tag{7.5}$$

Pour que le niveau q_0 soit atteint à l'infini vers l'ouest, q_0 doit être racine du dénominateur, c'est à dire

$$A_{ref} = \frac{B_{ref}}{q_0} .$$

On pose

$$\xi = \frac{q}{q_{ref}} \quad , \quad \xi_0 = \frac{q_0}{q_{ref}} \quad , \quad F_{ref} = \frac{m_{ref}}{c_{ref} q_{ref}} \quad , \quad (\text{nombre de Froude}) \quad ,$$

pour obtenir

$$\psi_W(q) = \frac{q_{ref}}{k (F_{ref} + 1)^2} \int_{\frac{q_P}{q_{ref}}}^{\frac{q}{q_{ref}}} \left(-\xi - 2\xi_0 + \frac{\xi_0 (\xi_0 - 4)}{\xi - \xi_0} + \frac{1 - \xi_0^3}{(\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi \quad ,$$

c'est à dire

$$\psi_W(q) = K \left[\frac{q_P^2 - q^2}{2 q_{ref}} + 2 \frac{q_0}{q_{ref}} (q_P - q) + \frac{q_0}{q_{ref}} (q_0 - 4q_{ref}) \ln \left(\frac{q - q_0}{q_P - q_0} \right) + \frac{(q_{ref}^3 - q_0^3) (q - q_P)}{q_{ref} (q - q_0) (q_P - q_0)} \right]$$

avec

$$K = \frac{1}{k (F_{ref} + 1)^2} \quad .$$

Le profil initial est déterminé par la formule $\psi_W(q) = x$ pour $x < 0$ et par $\psi_E(q) = x$ pour $x > 0$. Il est croissant pour $x < 0$ et décroissant pour $x > 0$, et continu en $x = 0$ où il prend la valeur q_P .

5.7.2 L'évolution du profil

Le profil est destiné à se déplacer vers l'Est, avec des vitesses respectives A_{ref} et c_* différentes pour chacune des parties Ouest ou Est. Le profil Ouest étant légèrement plus rapide, on verra se former un relèvement de la crête du profil, à la jonction des deux parties. La partie gauche de cette crête correspond à la continuité du profil Ouest, pour des profondeurs q allant en croissant de la valeur q_P à la valeur maximale q_{ref} .

La partie droite de cette crête correspond à une discontinuité, c'est à dire un choc, dont la localisation est imposée par la conservation de la masse : à chaque instant t , l'eau contenue dans ce relèvement de la crête provient du volume de la colonne d'eau de longueur $(A_{ref} - c_*) t$ qui a été déplacée entre temps. On note $q_g(t)$ et $q_d(t)$ les profondeurs d'eau respectivement situées à gauche et à droite de cette discontinuité, puis $x_0(t)$ sa position. On a toujours

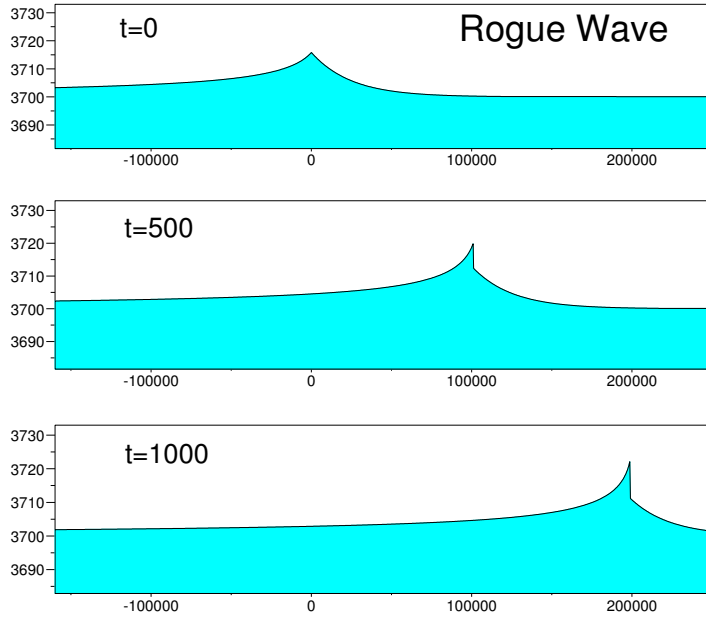
$$q_* \leq q_d(t) \leq q_P \leq q_g(t) \leq q_{ref} \quad .$$

Le profil Ouest se déplaçant à la vitesse (constante) A_{ref} , on l'obtient tout simplement en inversant, à chaque instant t , la relation

$$\psi_W(q) = x - A_{ref} t$$

pour $x < x_0(t)$, la fonction ψ_W ayant été définie plus haut. De la même façon, le profil Est est obtenu en inversant la relation

$$\psi_E(q) = x - c_* t$$



pour $x > x_0(t)$, avec la fonction ψ_E définie plus haut. Toujours à t fixé, les profondeurs $q_g(t)$ et $q_d(t)$, et la position $x_0(t)$ sont liées par trois conditions, qui impliquent trois équations. La première exprime que $q_g(t)$ est la valeur du profil Ouest lorsque $x = x_0(t)$, c'est à dire

$$\psi_W(q_g(t)) = x_0(t) - A_{ref} t .$$

La seconde exprime que $q_d(t)$ est la valeur du profil Est lorsque $x = x_0(t)$, c'est à dire

$$\psi_E(q_d(t)) = x_0(t) - c_* t .$$

La troisième est donnée par la relation de compatibilité de Rankine Hugoniot

$$(q_g(t) - q_d(t)) \sqrt{g \frac{q_d(t) + q_g(t)}{2q_d(t)q_g(t)}} + \frac{A_{ref} q_0}{q_g(t)} - \frac{c_* q_*}{q_d(t)} = A_{ref} - c_* ,$$

qui traduit la conservation de la masse. Une méthode de dichotomie appliquée sur le paramètre $x_0(t)$ permet la détermination simultanée de ces trois paramètres. En pratique, il est cependant plus facile de déterminer $x_0(t)$ en testant directement la conservation de la masse. Prenons deux points x_1 et x_2 tels que

$$x_1 + A_{ref} t < x_0(t) < x_2 + c_* t .$$

Si tel n'est pas le cas on augmentera x_2 ou on diminuera x_1 suffisamment. On note M_0 la masse comprise entre les points x_1 et x_2 à l'instant initial :

$$M_0 = \int_{x_1}^{x_2} q(x, 0) dx = \int_{x_1}^0 q_W(x, 0) dx + \int_0^{x_2} q_E(x, 0) dx ,$$

en notant q_W et q_E les profondeurs respectives des profils Ouest et Est. On doit retrouver cette même masse à chaque instant t entre les deux trajectoires d'équations

$$x_1'(t) = A_{ref} - \frac{q_{ref} c_{ref}}{q_W(x_1(t) - A_{ref}t)} , \quad x_1(0) = x_1 , \quad (7.6)$$

et

$$x_2'(t) = c_* \left(1 - \frac{q_*}{q_E(x_2(t) - c_*t)} \right) , \quad x_2(0) = x_2 , \quad (7.7)$$

c'est à dire qu'en posant

$$M(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} q(x, t) dx ,$$

on a toujours

$$M(t) = M_0 .$$

Notons que la quantité $M(t)$ peut être calculée explicitement par

$$M(t) = \int_{q_1(t)}^{q_g(t)} q \psi'_W(q) dq + \int_{q_d(t)}^{q_2(t)} q \psi'_E(q) dq ,$$

en notant $q_1(t) = q_W(x_1(t))$, $q_2(t) = q_E(x_2(t))$. Ce calcul ne fait intervenir que des primitives de fractions rationnelles. Encore plus simplement, en disposant des fichiers informatiques donnant q_W à l'Ouest d'un point x_0 et q_E à l'Est de ce point x_0 , on peut évaluer

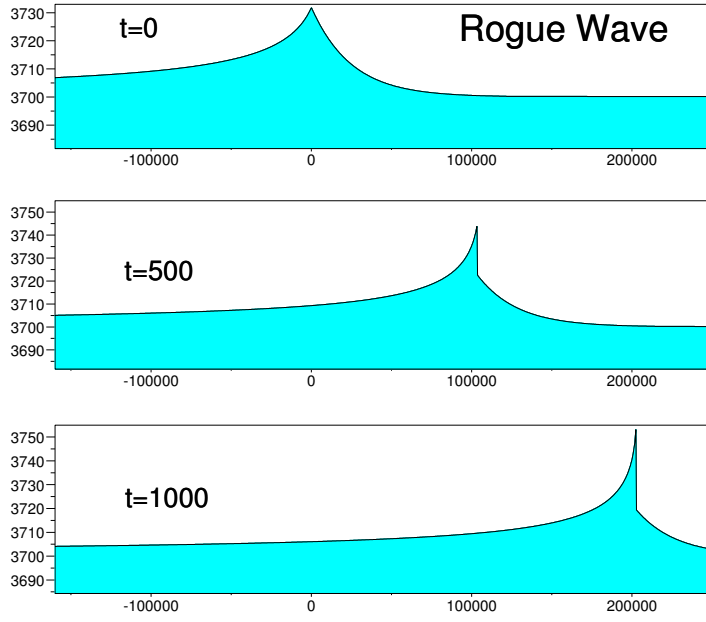
$$F(x_0) = \int_{x_1(t)}^{x_0} q_W dx + \int_{x_0}^{x_2(t)} q_E dx ,$$

puis déterminer $x_0 = x_0(t)$ tel que

$$F(x_0) = M_0$$

en remarquant que F est une fonction croissante.

Ce dernier procédé a été utilisé pour obtenir les résultats de la figure précédente. Pour cet exemple, on avait pris $q_* = 3700 \text{ m}$ et $q_0 = 3700.2 \text{ m}$, puis q_{ref} à sa valeur maximale, c'est à dire $q_{ref} = 3731.6737 \text{ m}$ dans notre cas. Ceci a induit la valeur de q_P , c'est à dire $q_P = 3715.8087 \text{ m}$ ici. Le coefficient de friction a été pris égal à $k = 0.45$. Il faut noter que la valeur de la friction est très influente sur la longueur d'onde des profils : de plus petites frictions donnent de plus grandes longueurs d'ondes. Pour des écoulements hydrauliques terrestres, les valeurs de la friction sont habituellement bien plus faibles, mais correspondent aussi à des profondeurs bien moindres. Il paraît ainsi naturel de considérer que pour des profondeurs bien plus grandes, ce coefficient doive être réévalué. A l'instant $t = 1000$, l'amplitude du choc $q_g - q_d$ atteint la valeur de 11 m , entre les



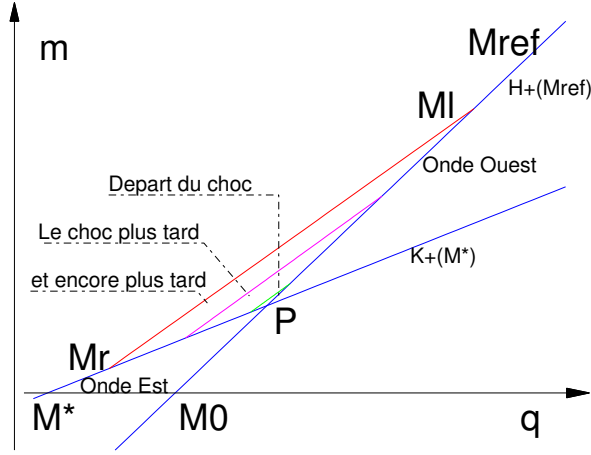
deux mailles adjascentes à sa position calculée $x_0(t)$. L'erreur relative de masse est de l'ordre de 10^{-4} , les trajectoires $x = x_1(t)$ et $x = x_2(t)$ ont été approchées par une simple formule de trapèze, compte tenu de la faible variation de la profondeur aux voisinages des trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui ont été choisies relativement loin du choc.

En augmentant légèrement la valeur de q_0 , on voit apparaître des chocs plus importants. Ainsi, dans l'exemple suivant, avec $q_0 = 3700.8 \text{ m}$, on obtient les valeurs $q_{ref} = 3763.8773$, et $q_P = 3731.8248$. L'amplitude du choc $q_g - q_d$ est égale à 33.787 m . La crête de vague culmine à plus de 50 mètres au dessus du niveau de la mer.

5.7.3 Interprétation graphique dans le plan de phase

On propose ici une interprétation graphique dans le plan de phase (q, m) en s'aidant de la figure ci dessous.

Les états M_* et M_0 sont représentés sur l'axe des q , puisqu'ils correspondent à des valeurs m_* et m_0 nulles. La droite passant par M_* correspond à $K_+(M_*)$, d'équation $m = c_*(q - q_*)$, et décrit la partie Est de l'onde. La droite passant par M_0 correspond à $H_+(M_{ref})$ d'équation $m = A_{ref}(q - q_0)$, et décrit la partie Ouest de l'onde. Ces deux droites se rencontrent en un point P . L'onde de choc est



représentée par le segment $M_l M_r$, avec M_l couissant le long de la droite $H_+(M_{ref})$, (onde Ouest), de P à M_{ref} , et M_r couissant le long de la droite $K_+(M_*)$ (Onde Est), de P à M_* . Le segment $M_l M_r$ n'est pas exactement un segment de droite, et son équation est obtenue à partir de la relation de Rankine Hugoniot. L'amplitude maximale est atteinte quand la première échéance, entre M_l arrivant en M_{ref} ou M_r arrivant en M_* est réalisée. Après cet instant, la vague va s'effondrer et le modèle de Saint-Venant n'est plus adapté à la description de cette phase, les distances étant trop courtes par rapport à la profondeur de l'océan.

Notons que l'échelle de la figure a été fortement modifiée, pour une meilleure lisibilité du croquis. En pratique, les deux droites $H_+(M_{ref})$, $K_+(M_*)$ et le segment $M_l M_r$ semblent confondus.

5.8 La modélisation du mascaret

5.9 L'eau vive et l'eau dormante : les lacs et le littoral

5.9.1 Les vagues de surf

Chapitre 6

Cyclones et Tourbillons

Les cyclones et les tsunamis sont des phénomènes de grande échelle au niveau de la planète, et peuvent être modélisés par des ondes sources, solutions de systèmes hyperboliques non homogènes. Pour les cyclones, le système porte sur les deux composantes de la vitesse du vent, à deux dimensions d'espace, à l'altitude zéro, et son écriture est relativement proche des équations d'Euler. En ce qui concerne les tsunamis, il faut distinguer les différentes étapes constituées de sa génération, sa propagation et son arrivée sur un littoral. Le modèle de détonique (section 3.7) permet d'analyser sa formation éventuelle après un séisme. Le modèle de Saint-Venant, compte tenu de l'échelle et des longueurs d'ondes des profils d'onde, est bien adapté à l'étude de la propagation en zone hauturière, puis en zone littorale et même en recouvrement du littoral. On retrouvera une forte analogie avec les Rogues waves du chapitre précédent (Section 4.6). Il s'agit également d'un problème posé en deux dimensions d'espace, qui peut se réduire le plus souvent à une seule dimension, dans la direction de propagation.

Il paraît nécessaire pour traiter ce type de problèmes de travailler au niveau d'une carte géographique. Il faut cependant s'assurer que les distances et les directions (ou caps) sont bien respectées. Ce n'est pas le cas dans la plupart des référentiels cartographiques en ce qui concerne les caps, sauf lorsque la projection est conforme (c'est à dire qu'elle conserve les angles). Ce n'est jamais le cas en ce qui concerne les distances. Cependant l'usage de la carte géographique est incontournable pour représenter les résultats. Il devient donc nécessaire de séparer les calculs de la représentation des résultats. Les calculs se feront au niveau du sol terrestre, donc à la surface d'un ellipsoïde de révolution, en utilisant la longitude λ et la latitude ϕ exprimés en radians, c'est à dire sans dimension en unités MKS. Les résultats seront représentés sur une carte géographique utilisant une projection conforme, par exemple la projection de Mercator, afin de conserver une perception exacte des caps.

6.1 Le référentiel cartographique

Le "globe terrestre" est en fait un ellipsoïde de révolution de paramètres $a = 6378135 \text{ m}$ et $b = 6356750 \text{ m}$. Dans un référentiel X, Y, Z dont l'origine O est au centre de la terre, et les deux axes OX et OY dans le plan de l'équateur, l'équation de la surface est donnée par

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{a}\right)^2 + \left(\frac{Z}{b}\right)^2 = 1 \quad .$$

En fonction des paramètre de longitude λ et de latitude ϕ , on obtient

$$\begin{aligned} X &= a \cos\phi \cos\lambda \\ Y &= a \cos\phi \sin\lambda \\ Z &= b \sin\phi \end{aligned}$$

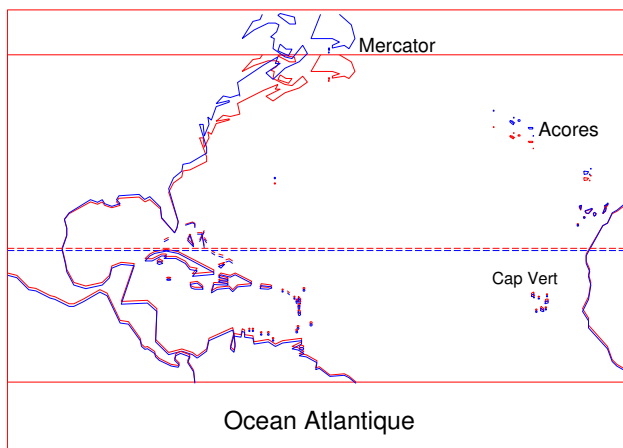
avec

$$-\pi < \lambda \leq \pi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \quad .$$

On note

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0.0818198$$

l'excentricité de l'ellipse correspondant à la trace de la surface de la terre dans un plan contenant l'axe des pôles OZ . En notant R_s un coefficient correspondant au produit du rayon d'un parallèle (d'équation $\phi = \text{Constante}$) par l'échelle de la carte, on représente ci dessous la superposition de deux cartes de l'Atlantique nord.



On note x et y les coordonnées d'un point de la carte. Le tracé rouge correspond à la représentation simpliste

$$x = R_s \lambda \quad , \quad y = R_s \phi \quad .$$

Cette représentation ne respecte ni les distances ni les caps, et les directions repérées sur la carte ne correspondent pas à des azimuts effectifs. Le tracé bleu correspond à la projection de Mercator :

$$x = R_s \lambda \quad , \quad y = R_s \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}} .$$

Le coefficient $E(\phi) = \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}}$ décroît de 1 à 0.9950 lorsque ϕ varie de l'équateur à 50 ° N. Il est quelquefois pris égal à 1 , ce qui correspond à faire tendre e vers zéro, autrement dit à assimiler la terre à une sphère. Ceci représente une erreur bien entendu nulle à l'équateur, de l'ordre de 0.5% à la latitude 50 ° N, et jusqu'à 0.65% à la latitude 75 ° N. La représentation donnée ici prend en compte le coefficient $E(\phi)$.

On observe une nette différence entre les deux représentations notamment vers le nord, la projection de Mercator déplaçant les contours vers le nord, par rapport à leur position donnée par la représentation simpliste. Ce déplacement vers le nord serait encore un petit peu plus important si la terre est supposée sphérique. Cependant, dans la région du tropique du Cancer, vers 23.27 ° N, la différence n'est pas perceptible. S'agissant de la région qui nous intéresse dans le cas des cyclones, on fait le choix d'utiliser une projection de Mercator à partir d'une sphère dont le rayon est égal à la distance d'un point du tropique ($\phi = 0.40614 \text{ radians}$) au centre de la terre, soit

$$R_T = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} = 6374802 \text{ m} .$$

Ceci conduit à la transformation

$$x = R_s \lambda \quad , \quad y = R_s \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)$$

où R_s est le produit de R par un facteur d'échelle. En utilisant l'identité

$$\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) = \text{Argsh} (\tan(\phi)) ,$$

la transformation inverse est donnée par les formules

$$\lambda = \frac{x}{R_s} \quad , \quad \phi = \text{Arctan} \left(\text{sh} \left(\frac{y}{R_s} \right) \right) .$$

Il s'agit d'une tranformation conforme, puisque

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{R_s}{\cos \phi}$$

d'où un rapport des dérivées

$$\frac{\frac{dx}{d\lambda}}{\frac{dy}{d\phi}} = \cos \phi = \frac{2\pi R_T \cos \phi}{2\pi R_T} ,$$

qui est le rapport de la longueur du parallèle à la longueur du méridien. De même, le rapport entre un élément de longueur de parallèle à un élément de longueur de méridien est conservé, ce qui signifie la conservation des angles et donc la conformité de la transformation.

6.2 Les équations du vent : des Alizés au Pot-au-noir

Compte tenu de la taille du phénomène relativement à la dimension de la Terre, il nous faut transformer les équations d'Euler, en dimension 3 d'espace, dans un système de coordonnées sphériques compatible avec les notions de parallèles, de méridiens et donc plus facile à cartographier. On notera u la composante de la vitesse dans la direction Ouest-Est, dans le plan du parallèle, et la variable dans cette direction est la longitude notée λ , comme précédemment. On notera ensuite v la composante de la vitesse dans la direction Sud-Nord, dans le plan du méridien, et la variable dans cette direction est la latitude notée ϕ , comme précédemment. Enfin la composante verticale de la vitesse est notée w , dirigée du sol vers le zénith, et la variable dans cette direction est notée r , pour la mise en équation, puis on utilisera ensuite $z = r - R$, plus commode pour désigner la dimension verticale au dessus du sol ($r > R$).

Les équations d'Euler en dimension 3 d'espace sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a}{\partial X} + b \frac{\partial a}{\partial Y} + c \frac{\partial a}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} , \\ \frac{\partial b}{\partial t} + a \frac{\partial b}{\partial X} + b \frac{\partial b}{\partial Y} + c \frac{\partial b}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} , \\ \frac{\partial c}{\partial t} + a \frac{\partial c}{\partial X} + b \frac{\partial c}{\partial Y} + c \frac{\partial c}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} ,\end{aligned}$$

en notant a, b, c les composantes de la vitesse dans le système de coordonnées X, Y, Z , puis P le champ de pression, puis ρ le champ de densité, qu'on peut prendre constant, de valeur

$$\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3 .$$

Le changement de variables s'écrit

$$X = r \cos\phi \cos\lambda , \quad Y = r \cos\phi \sin\lambda , \quad Z = r \sin\phi .$$

La transformation du vecteur vitesse est obtenue par

$$\begin{aligned}a &= -\sin\lambda u - \sin\phi \cos\lambda v + \cos\phi \cos\lambda w , \\ b &= \cos\lambda u - \sin\phi \sin\lambda v + \cos\phi \sin\lambda w , \\ c &= \cos\phi v + \sin\phi w .\end{aligned}$$

Son inversion donne les trois formules :

$$\begin{aligned}u &= -\sin\lambda a + \cos\lambda b , \\ v &= -\sin\phi \cos\lambda a - \sin\phi \sin\lambda b + \cos\phi c , \\ w &= \cos\phi \cos\lambda a + \cos\phi \sin\lambda b + \sin\phi c .\end{aligned}$$

On obtient à partir de ces formules les résultats préliminaires suivants.

Proposition 6.2.1 Pour toute quantité Q fonction régulière de X, Y, Z , on a

$$\frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial Q}{\partial \phi} + w \frac{\partial Q}{\partial r} = a \frac{\partial Q}{\partial X} + b \frac{\partial Q}{\partial Y} + c \frac{\partial Q}{\partial Z} ,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= -r \cos \phi \sin \lambda \frac{\partial Q}{\partial X} + r \cos \phi \cos \lambda \frac{\partial Q}{\partial Y} , \\ \frac{\partial Q}{\partial \phi} &= -r \sin \phi \cos \lambda \frac{\partial Q}{\partial X} - r \sin \phi \sin \lambda \frac{\partial Q}{\partial Y} + r \cos \phi \frac{\partial Q}{\partial Z} , \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= \cos \phi \cos \lambda \frac{\partial Q}{\partial X} + \cos \phi \sin \lambda \frac{\partial Q}{\partial Y} + \sin \phi \frac{\partial Q}{\partial Z} . \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et les formules de changement de variables et de vitesses, on aboutit aux équations d'Euler sur la sphère :

pour la composante Ouest-Est, le long du parallèle,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{uv}{r} \tan(\phi) - \frac{uw}{r} ,$$

pour la composante Sud-Nord, le long du méridien,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \phi} = -\frac{u^2}{r} \tan(\phi) - \frac{vw}{r} ,$$

et pour la composante verticale, en direction du zénith,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{u^2 + v^2}{r} .$$

Lorsqu'on tient compte de la rotation de la terre, dont la vitesse angulaire est constante et donnée par

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{24 \text{ heures}} = \frac{2\pi}{86400} = \frac{\pi}{43200} ,$$

le repère précédent est un repère mobile, on doit ajouter aux équations précédentes, l'accélération de Coriolis à la latitude ϕ , de la forme

$$2 \sin \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \Omega_0 \sin \phi v \\ 2 \Omega_0 \sin \phi u \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On adoptera la notation

$$\omega_0 = 2 \Omega_0 \left(= \frac{\pi}{21600} \right) , \quad \omega = \omega_0 \sin \phi ,$$

pour représenter le coefficient du terme de Coriolis.

On s'intéresse maintenant aux vitesses de vent au niveau du sol, ce qui revient à fixer $r = R_T$, le rayon de la Terre R_T étant estimé au niveau des tropiques. Seules les équations sur les composantes horizontales de la vitesses, u et v , seront retenues, en convenant que la composante w est nulle et que le terme de pression est complètement compensé par la force de gravité, c'est à dire

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g = 0 .$$

Il convient également d'insérer dans le modèle un terme de friction, de coefficient $k > 0$, qui vient s'ajouter au terme de Coriolis. Les deux constantes k et ω_0 correspondent à des fréquences en terme d'unités (exprimées en s^{-1}). On obtient le modèle à deux équations suivant :

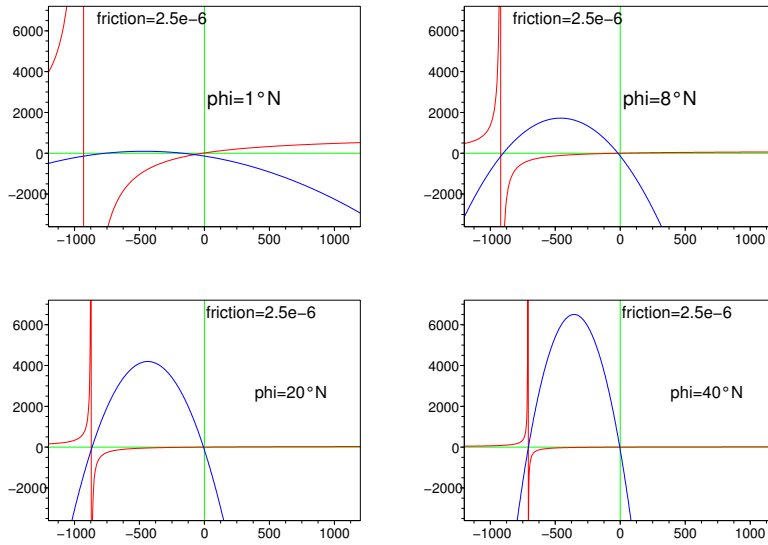
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} &= \frac{uv}{R_T} \tan(\phi) - ku + \omega_0 \sin \phi v , \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} &= -\frac{u^2}{R_T} \tan(\phi) - kv - \omega_0 \sin \phi u . \end{aligned}$$

On considère que les variations du champ de pression sont lentes par rapport à la vitesse du vent, ce qui permet d'interpréter le terme de pression comme une donnée à intégrer au terme source. On note u_* et v_* les racines du terme source, solution du système de deux équations algébriques

$$\begin{aligned} k u_* - \omega_0 \sin \phi v_* - \frac{\tan(\phi)}{R_T} u_* v_* &= -\frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} , \\ \omega_0 \sin \phi u_* + k v_* + \frac{\tan(\phi)}{R_T} u_*^2 &= -\frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} . \end{aligned}$$

On constate immédiatement que v_* peut s'exprimer en fonction de u_* à partir de la seconde équation, ce qui, reporté dans la première équation, la transforme en une équation du troisième degré, qui a toujours une solution. L'unicité n'est pas garantie en général, et dépend entre autres des valeurs du gradient de pression. Cependant on peut se rendre compte aisément que les conditions de non unicité correspondent à des valeurs des vitesses qui ne risquent pas d'être atteintes...

Dans le plan des vitesse (u, v) , ou plan de l'hodographe, la première équation correspond à une hyperbole ayant pour asymptote verticale la droite d'équation $u = -\omega_0 R_T \cos \phi$, et pour asymptote horizontale la droite d'équation $v = k R_T \cotan(\phi)$. On peut remarquer qu'à l'équateur, l'asymptote verticale correspond à une composante de la vitesse de l'ordre de 927 m/s, soit 3330 km/h... et à une latitude de 45 ° N, à 650m/s soit 2360km/h... ce qui dépasse largement la vitesse du son dans l'air et n'a jamais fait partie d'aucune prévision. La seconde équation correspond à une parabole où v atteint une valeur maximale pour $u = -\frac{1}{2}\omega_0 R_T \cos \phi$, soit exactement la moitié de la valeur précédente, ce qui reste encore une valeur irréaliste pour la vitesse du vent. Les deux courbes sont représentées dans la figure précédente, pour plusieurs latitudes de l'hémisphère nord. On note que pour $u > -\frac{1}{2}\omega_0 R_T \cos \phi$, la première courbe représente v comme une fonction stictement croissante de la variable u , notée $v_1(u)$, et que la seconde courbe représente v comme une fonction stictement décroissante de la même variable u , notée $v_2(u)$. L'unicité est effectivement assurée si $u > -\omega_0 R_T \cos \phi$. En effet, s'il existe deux points d'intersection de ces deux courbes, l'un est situé

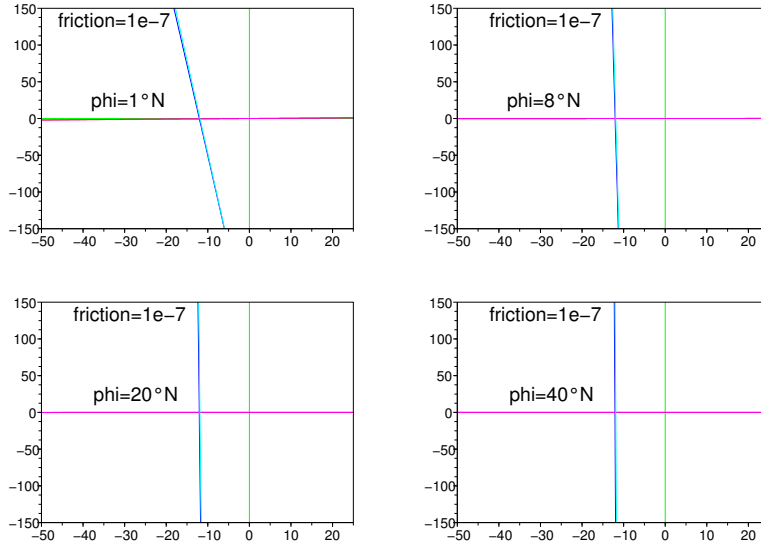


nécessairement entre $u = -\omega_0 R_T \cos\phi$ et $u = -\frac{1}{2}\omega_0 R_T \cos\phi$, et il suffit de comparer les dérivées entre cette racine et $u = +\infty$ pour en déduire qu'aucune autre racine n'est possible, compte tenu de la valeur de ω , la décroissance de la parabole devenant trop forte.

Il reste à estimer la valeur du coefficient de friction k . On peut remarquer, au moins pour $\phi > 0$, que sa valeur n'est jamais intervenue dans une condition d'existence ou d'unicité de la racine recherchée. La valeur de la friction aura cependant une influence non négligeable sur la valeur de cette racine. La figure ci dessus représente les courbes $v = v_1(u)$ et $v = v_2(u)$ lorsque $k = 10^{-7}$. On constate que les plus fortes valeurs des vents sont obtenues pour la plus petite valeur de ϕ , ici 1°N , c'est à dire très près de l'équateur. Ceci n'est pas du tout réaliste : les navigateurs appellent cette zone le **pot-au-noir** par analogie au pot qui servait à l'époque à contenir le cirage, noir, comme les nuages de pluie sur leurs têtes, et le cafard, la déprime et l'angoisse, quelquefois la faim, éprouvés pour le manque de vent interminable... Les anglais parlent des *doldrums* pour désigner cette zone. En diminuant encore la valeur de k , on aboutit à une absurdité, la vitesse des vents devenant infinie... et ne risque donc pas d'encalminer les navires.

On en conclut qu'il ne faut jamais négliger la friction, et les figures suivantes, pour lesquelles $k = 10^{-4}$ sont instructives pour donner une estimation de la valeur de la friction, le phénomène de pot-au-noir étant bien représenté pour $\phi = 1^\circ \text{N}$.

On avait $\omega_0 = \frac{\pi}{21600} = 1.4544 \cdot 10^{-4}$, ce qui amène à constater que les valeurs des coefficients de



friction k et de Coriolis ω sont du même ordre. En négligeant les termes quadratiques, les équations

$$v = v_1(u) \quad , \quad v = v_2(u)$$

deviennent un système linéaire :

$$k u_* - \omega_0 \sin\phi v_* = -\frac{1}{\rho R_T \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad , \quad \omega_0 \sin\phi u_* + k v_* = -\frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad ,$$

dont la résolution est immédiate. On obtient

$$u_* = -\frac{\omega_0 \sin\phi}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2\phi} \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{k}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2\phi} \frac{1}{\rho R_T \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad ,$$

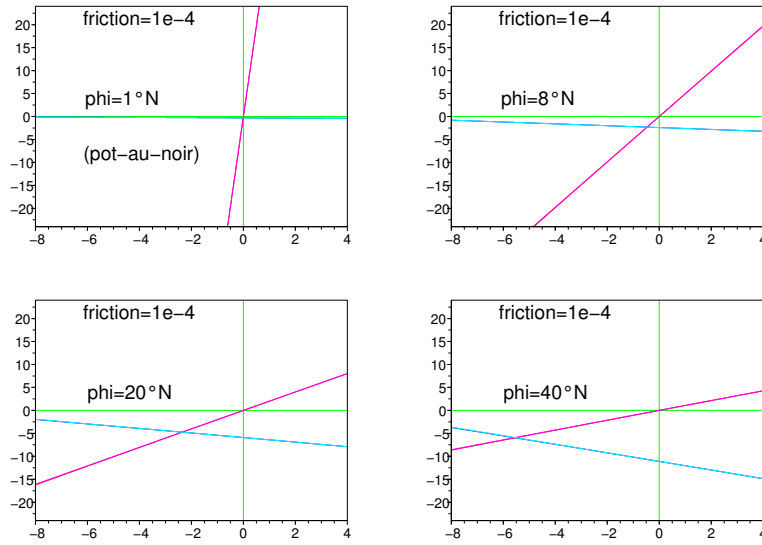
et

$$v_* = -\frac{k}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2\phi} \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\omega_0 \sin\phi}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2\phi} \frac{1}{\rho R_T \cos\phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad .$$

On constate effectivement que lorsque ϕ devient nul, le coefficient

$$\frac{\omega_0 \sin\phi}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2\phi}$$

devient bien nul lorsque $k \neq 0$, et devient infini lorsque $k = 0$, ce qui rejoint complètement les remarques précédentes. La largeur de la zone de pot-au-noir dépend de la valeur de k et de $\frac{\partial P}{\partial \phi}$;



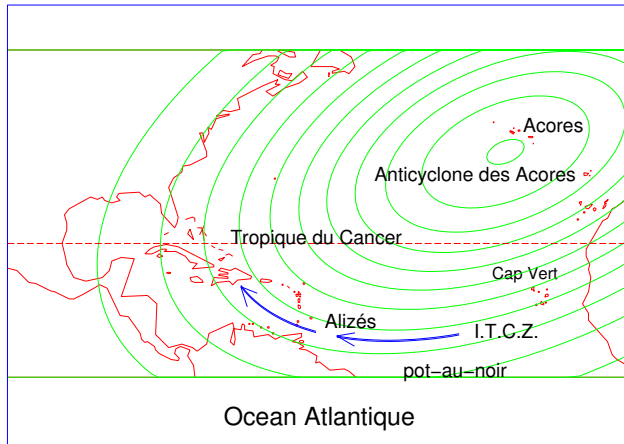
cette zone est d'autant plus large que k est important et que $\frac{\partial P}{\partial \phi}$ est faible. Pour se donner une idée de l'échelle des gradients de pression, on peut évaluer de que donne un accroissement de 1 mBar sur un degré de latitude, soit 111 km environ. On aura $\Delta P = 100 \text{ pascals}$ et $\Delta \phi = \frac{\pi}{180}$, d'où

$$\frac{\Delta P}{\Delta \phi} = \frac{18000}{\pi} \simeq 5730, \text{ et } \frac{1}{\rho R_T} \frac{\Delta P}{\Delta \phi} \simeq 6.9 \cdot 10^{-4}.$$

On retrouve cette même valeur d'échelle, de l'ordre de 10^{-4} .

Dans les deux figures précédentes, pour $k = 10^{-7}$ comme pour $k = 10^{-4}$, les deux courbes $v = v_1(u)$ et $v = v_2(u)$ ont été dessinées, ainsi que des droites correspondant aux équations du système linéaire obtenu sans les termes quadratiques. La différence entre chaque courbe et la droite correspondante est imperceptible.

Ces figures correspondent à des données réalistes dans la zone intertropicale, c'est à dire entre le tropique du Cancer et l'équateur pour l'hémisphère nord. On a simulé la présence d'un anticyclone vers la latitude 30° N , ce qui peut correspondre à une position possible de l'Anticyclone des Açores, pour l'Atlantique nord. Ainsi le terme $\frac{\partial P}{\partial \phi}$ est positif, bien plus important que $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$, qui a été pris positif lui aussi. On obtient une composante de la vitesse u_* , le long du parallèle, qui est négative, donc orientée vers l'ouest, et une composante v_* négative elle aussi, donc orientée vers le sud. Cette zone est appelée ITCZ, pour Inter Tropical Convergence Zone, où l'on observe que le vent apporte de l'air (et des nuages chargés d'humidité) de la zone tropicale vers d'équateur, où leur vitesse devient nulle (le terme $\frac{\partial P}{\partial \phi}$ se réduisant également, pour devenir nul en $\phi = 0$) ce qui explique les



pluies équatoriales et la zone du pot-au-noir. Plus loin, vers l'ouest, les vents de vitesse (u_*, v_*) vont contourner l'Anticyclone, et se diriger vers les Caraïbes et le Golfe du Mexique : il s'agit des **Alizés**.

En reprenant le système d'équations non linéaires $v = v_1(u)$, $v = v_2(u)$, on obtient en multipliant la première par u et la seconde par v , puis en les ajoutant, la relation :

$$k (u^2 + v^2) = -\frac{u}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \frac{v}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi},$$

qui exprime que l'angle entre le gradient de pression et la vitesse est proportionnel à $k\sqrt{u^2 + v^2}$, c'est à dire faible en général, quand les vents ne sont pas trop importants, et ceci d'autant plus que la valeur de k est faible. Ceci provient de l'observation que la vitesse est proche d'être orthogonale au gradient de pression, lui même normal à l'isobare ($P = Cte$), ceci dans le plan horizontal, d'où la remarque suivante : *l'orientation de la vitesse est proche du champ tangent aux isobares, la haute pression étant située à droite et la basse pression à gauche de l'écoulement, de plus la force du vent est quasiment proportionnelle au gradient de pression.*

La formule précédente procure également un argument pour évaluer la valeur du coefficient de friction k . On considère un vent d'Alizé moyen, correspondant à $u = -5 \text{ m/s}$ (soit 18 km/h) et $v = 0.5 \text{ m/s}$ (soit 1.8 km/h) et un gradient de pression tel que

$$\frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \simeq 10^{-4}, \quad \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} \simeq 5 \cdot 10^{-4},$$

et en identifiant on obtient

$$k \simeq 10^{-5},$$

qui apparaît donc comme une valeur réaliste du coefficient de friction.

6.3 Calcul des trajectoires des cyclones

Le champ de vitesse (u_*, v_*) , déterminé par la racine du terme source, induit des trajectoires caractéristiques, d'équations différentielles

$$\lambda'(t) = \frac{u_*(\lambda, \phi)}{R_T \cos \phi} \quad , \quad \phi'(t) = \frac{v_*(\lambda, \phi)}{R_T} \quad ,$$

dont la résolution permet de suivre les déplacements des vents, et des phénomènes déplacés par ces vents.

Les cyclones font parties des objets déplacés par les Alizés, dans l'Atlantique nord, depuis leur génération dans la zone du Cap Vert, vers les côtes des Caraïbes et d'Amérique du Nord, en contournant l'Anticyclone des Açores. L'intégration de ces équations permet donc d'obtenir les **trajectoires des cyclones** pour une distribution de pression atmosphérique fixée. Bien entendu, le calcul de la trajectoire au cours du temps doit être réactualisée à chaque instant en fonction des variations du champ de pression atmosphérique, qui est cependant bien plus lente que les mouvement des vents dans la réalité. On n'observe pas de feedback entre la présence d'un cyclone et le champ de pression en général, les échelles étant très différentes. Une interaction peut cependant être constatée pour les cyclones gigantesques, tel Wilma dans le seconde partie de sa course, en octobre 2005.

La figure ci dessous représente le résultat d'une simulation numérique.

Le cyclone a été généré près des îles du Cap Vert, au point de longitude 27.5° Ouest et de latitude 16° N. Le coefficient de friction a été pris égal à $k = 3.5 \cdot 10^{-6}$. Les autres paramètres sont déjà connus. L'Anticyclone des Açores a été représenté par une expression de la forme

$$P(\lambda, \phi) = P_{min} + (P_{max} - P_{min}) e^{-(\xi^2 + \eta^2)} \quad ,$$

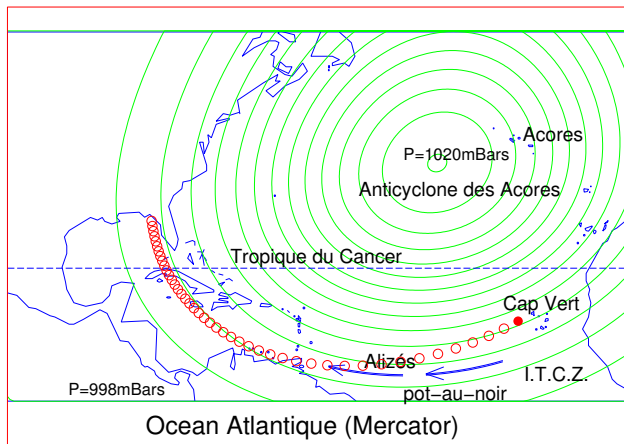
avec

$$\xi = \frac{1}{A_0} ((\lambda - \lambda_0) \cos \theta + (\phi - \phi_0) \sin \theta) \quad , \quad \eta = \frac{1}{B_0} (-(\lambda - \lambda_0) \sin \theta + (\phi - \phi_0) \cos \theta) \quad ,$$

et

$$\theta = 1.45\pi \quad , \quad A_0 = 0.36 \quad , \quad B_0 = 0.54 \quad , \quad P_{min} = 998 \text{ mBars} \quad , \quad P_{max} = 1020 \text{ mBars} \quad ,$$

et dont le maximum est situé au point de longitude 40° Ouest et de latitude 36° N. La méthode d'Euler a été utilisée pour intégrer les équations différentielles, avec un pas de 6 heures, sur une durée de 11 jours. Les résultats sont obtenus instantanément. Les calculs ont été effectué sur la sphère, puis reportés sur la carte par une projection de Mercator, qui conserve les directions.



L'influence du terme de friction est très importante. Une variation de 15% en plus ou en moins donne des déplacements conséquents de la trajectoire, et bien entendu, une plus forte friction va diminuer la vitesse.

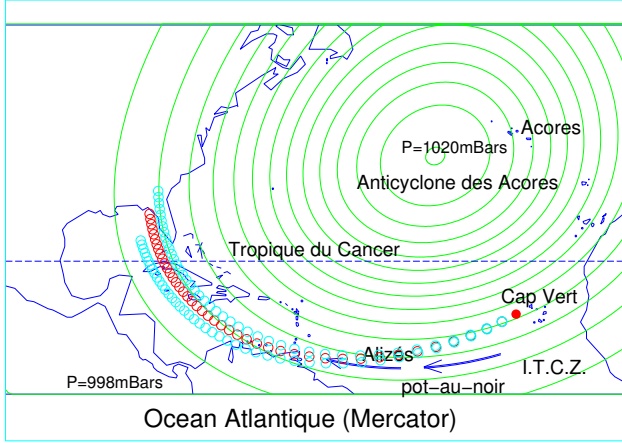
La figure ci-dessus représente le calcul précédent, en rouge, ainsi que deux autres calculs, en bleu clair, pour des coefficients de friction augmentés ou diminués de 15% par rapport au cas précédent. La friction la plus faible correspond à la courbe la plus au nord, donc plus proche de l'isobare. On constate que dans le cas de la friction la plus grande, la trajectoire est plus courte.

On note aussi un rapprochement des points, qui est dû à la diminution du gradient de pression, et donc de la vitesse des Alizés.

La figure suivante correspond à une situation où deux anticyclones sont présents, l'un proche des Açores, et l'autre aux U.S.A., au niveau de l'Oklahoma ou du Kansas. On observe l'apparition d'un col de pression, et suivant la valeur du coefficient de friction, la trajectoire parvient ou non à le franchir, et chaque cas génère une trajectoire très différente.

Une légère perturbation des coordonnées du centre de l'un ou l'autre des deux anticyclones, de moins d'un degré quelquefois, va également générer des trajectoires très différentes. On retient donc une très grande sensibilité du modèle relativement au coefficient de friction et à la distribution du champ de pression.

Une autre source de perturbation de la trajectoire provient de la précision du calcul. Les deux dessins suivants représentent les résultats de calcul de trajectoires utilisant dans le premier cas



un pas de discrétisation en temps Δt égal à 4.5 heures, et dans le second cas à 3.5 heures. Cette différence relativement réduite change complètement la trajectoire intermédiaire, en rouge, sans beaucoup modifier les deux autres.

Les calculs ont été effectués par la méthode d'Euler explicite. On pose $t_n = n\Delta t$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et on approche $\lambda(t_n)$ et $\phi(t_n)$ respectivement par les quantités λ_n et ϕ_n calculées de proche en proche par les formules

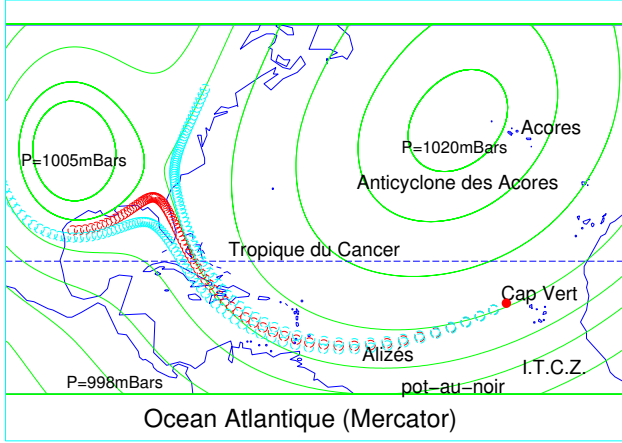
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta t \frac{u_*(\lambda_n, \phi_n)}{R_T \cos(\phi_n)}$$

et

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t \frac{v_*(\lambda_n, \phi_n)}{R_T},$$

les valeurs $u_*(\lambda_n, \phi_n)$ et $v_*(\lambda_n, \phi_n)$ étant évaluées en appliquant les formules données au paragraphe précédent, ce qui nécessite l'évaluation du gradient du champ de pression P . Les valeurs initiales λ_0 et ϕ_0 sont déterminées par la position initiale (c'est à dire $\lambda(0)$, $\phi(0)$) du cyclone, près des îles du Cap Vert en général.

La méthode est d'ordre un en précision, ce qui signifie que l'erreur d'approximation est proportionnelle à Δt . On observe que pour les valeurs de Δt les plus petites, donc dans le cas relativement



le plus précis le calcul donne pour la trajectoire intermédiaire une orientation vers le nord, tandis qu'une légèrement plus grande valeur de Δt va lui donner une orientation vers le Sud-Ouest, presque diamétralement opposée. Ceci est dû à un effet de seuil, le passage du col en pression n'étant plus possible. La différence de précision sur les deux autres trajectoires reste insignifiante.

6.4 L'oeil du cyclone

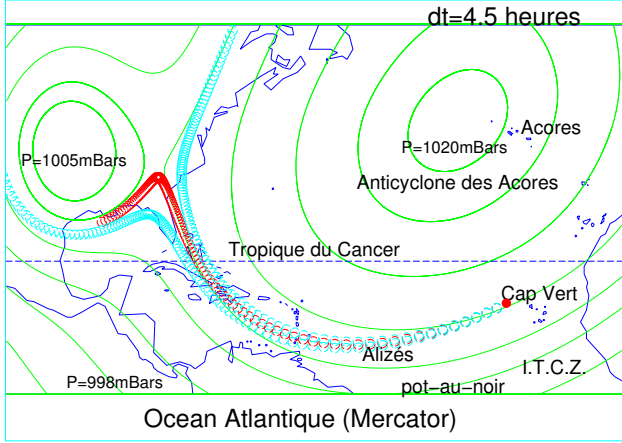
Notre intérêt va maintenant se fixer sur le phénomène du cyclone proprement dit, et en particulier la formation de l'oeil. L'échelle du phénomène se réduit à quelques degrés de diamètre, et on pourra se fixer une latitude de référence ϕ_* pour simplifier le modèle. La géométrie attendue est de symétrie circulaire, des vents violents venant contourner un cercle intérieur, l'oeil du cyclone. Ainsi, l'échelle des valeurs des vitesses va augmenter considérablement au voisinage du centre du cyclone. On reprend les champs de vitesse des alizés,

$$u_* = -\frac{\omega_0 \sin \phi}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2 \phi} \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{k}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2 \phi} \frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda},$$

et

$$v_* = -\frac{k}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2 \phi} \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\omega_0 \sin \phi}{k^2 + \omega_0^2 \sin^2 \phi} \frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda}.$$

On considère qu'un phénomène se propageant exactement à cette vitesse n'absorbe pas d'énergie au contact de la surface de l'océan, supposée chaude. Pour une vitesse (u, v) différente, on assiste à



l'absorption d'une quantité d'énergie, proportionnelle à la différence $(u - u_*, v - v_*)$, de coefficient noté σ_* , supposé positif. Les équations dynamiques deviennent ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho R_T \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{uv}{R_T} \tan(\phi) - ku + \omega_0 \sin \phi v + \sigma_*(u - u_*) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho R_T} \frac{\partial P}{\partial \phi} = -\frac{u^2}{R_T} \tan(\phi) - kv - \omega_0 \sin \phi u + \sigma_*(v - v_*) .$$

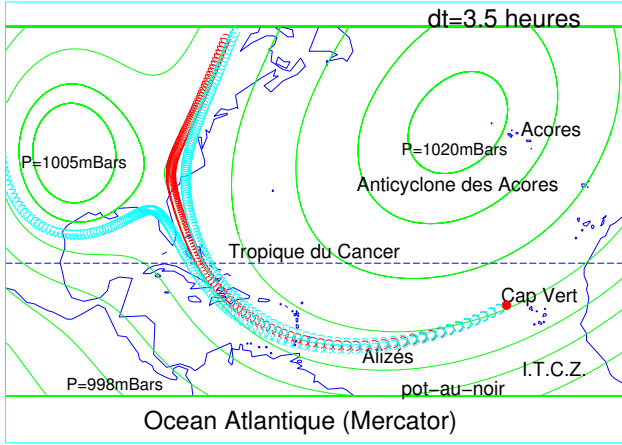
On peut en réduire l'écriture en négligeant les termes quadratiques et en reprenant les expressions de u_* et de v_* pour obtenir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial u}{\partial \phi} = (\sigma_* - k) (u - u_*) + \omega_0 \sin \phi (v - v_*) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial v}{\partial \phi} = (\sigma_* - k) (v - v_*) - \omega_0 \sin \phi (u - u_*) .$$

On remarque que le coefficient σ_* vient s'opposer au coefficient de friction, et de fait la friction pourra être négligée à l'intérieur du phénomène, alors qu'il ne pouvait pas en être question à l'extérieur, comme on l'a vu largement dans les sections précédentes.

Nous allons maintenant transposer ces deux équations, avant simplification des termes quadratiques, sur la carte géographique, par une transformation de Mercator. On effectue le changement



de variables

$$x = R_T \lambda \quad , \quad y = R_T \operatorname{Ln} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) \quad .$$

On obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = R_T \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{R_T}{\cos \phi} \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{d\phi}{dy} = \frac{\cos \phi}{R_T} \quad ,$$

et des formules similaires pour la composante v . Les équations, sur la carte, deviennent ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\cos \phi} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\cos \phi} \frac{\partial u}{\partial y} = (\sigma_* - k) (u - u_*) + \omega_0 \sin \phi (v - v_*) + \frac{uv}{R_T} \tan(\phi) \quad ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\cos \phi} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\cos \phi} \frac{\partial v}{\partial y} = (\sigma_* - k) (v - v_*) - \omega_0 \sin \phi (u - u_*) - \frac{u^2}{R_T} \tan(\phi) \quad .$$

On introduit le champ de vitesse (U, V) défini par

$$U = \frac{u}{\cos \phi} \quad , \quad V = \frac{v}{\cos \phi}$$

pour obtenir le système suivant, après simplification par $\cos \phi$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = (\sigma_* - k)(U - U_*) + \omega_0 \sin \phi (V - V_*) + \frac{2UV \sin \phi}{R_T} \quad ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = (\sigma_* - k)(V - V_*) - \omega_0 \sin\phi (U - U_*) + \frac{(V^2 - U^2) \sin\phi}{R_T} ,$$

en ayant posé

$$U_* = \cos\phi u_* , \quad V_* = \cos\phi v_* .$$

On note une modification du terme source, au niveau des termes quadratiques. Ici encore, on peut négliger ces termes quadratiques; en effet, ils deviennent du même ordre de grandeur que par exemple le terme de Coriolis pour des vitesses dépassant les 460 ms^{-1} soit près de 1670 kmh^{-1} , ce qui n'est absolument pas réaliste, même pour les cyclones les plus violents. Le système se réduit ainsi à

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= (\sigma_* - k)(U - U_*) + \omega_0 \sin\phi (V - V_*) , \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= (\sigma_* - k)(V - V_*) - \omega_0 \sin\phi (U - U_*) , \end{aligned}$$

qu'on appellera **système cartographique**.

A l'échelle du phénomène recherché, on va pouvoir considérer que U_* et V_* sont des constantes, et on observe immédiatement dans ce cas que la solution triviale

$$U = U_* , \quad V = V_*$$

est bien une solution. On s'intéresse à la recherche d'une onde source, caractérisée par le fait d'être à la fois une solution du système cartographique précédent, et du système homogène ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U_* \frac{\partial U}{\partial x} + V_* \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 , \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U_* \frac{\partial V}{\partial x} + V_* \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 , \end{aligned}$$

qui exprime que le phénomène est globalement transporté par le champ de vitesses (U_*, V_*) . La différence du système cartographique au système homogène conduit à la condition

$$\begin{aligned} (U - U_*) \frac{\partial U}{\partial x} + (V - V_*) \frac{\partial U}{\partial y} &= (\sigma_* - k)(U - U_*) + \omega_0 \sin\phi (V - V_*) , \\ (U - U_*) \frac{\partial V}{\partial x} + (V - V_*) \frac{\partial V}{\partial y} &= (\sigma_* - k)(V - V_*) - \omega_0 \sin\phi (U - U_*) . \end{aligned}$$

Ces relations expriment que, lorsque le vecteur (U, V) est différent de (U_*, V_*) , les vecteurs

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x} - (\sigma_* - k) \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \omega_0 \sin\phi \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} + \omega_0 \sin\phi \\ \frac{\partial V}{\partial y} - (\sigma_* - k) \end{array} \right)$$

sont colinéaires.

Par mesure de simplicité des calculs, on va également fixer la latitude à un niveau de référence ϕ_* , constant, correspondant par exemple au centre de ce phénomène.

Une solution, en particulier solution du système homogène, est nécessairement une fonction des variables $x - U_*t$ et $y - V_*t$ et si elle présente une discontinuité, c'est à dire un choc, celle ci est portée par une courbe d'équation

$$S(x - U_*t, y - V_*t) = 0 .$$

On a le résultat suivant :

Théorème 6.4.1 *Le saut de discontinuité $(\gamma U, \gamma V)$ est tangent à la courbe de discontinuité.*

La démonstration exige l'utilisation d'espaces fonctionnels particuliers, mais on peut la présenter assez simplement en se plaçant dans la configuration suivante, qui sera celle du mur de l'oeil du cyclone. On note $(U_* + \gamma U, V_* + \gamma V)$ la valeur de la solution d'un coté de la discontinuité et donc (U_*, V_*) sa valeur de l'autre côté. Au voisinage de la discontinuité, la solution est de la forme

$$U = U_* + \gamma U H(S(x - U_*t, y - V_*t)) \quad , \quad V = V_* + \gamma V H(S(x - U_*t, y - V_*t)) \quad ,$$

où H est la distribution de Heaviside, vérifiant

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0, \\ 0 & \text{si } \xi < 0, \end{cases}$$

et dont on note que la valeur en $\xi = 0$ n'est pas déterminée. Cette incertitude se traduit par une multiplicité de représentants possibles de représentants fonctionnels de H . Ceci n'aurait pas d'inconvénient dans un cadre linéaire mais nous pose un problème ici où la non linéarité exige quelques manipulations algébriques, en particulier des produits de H par sa dérivée H' qui correspond à une distribution de Dirac. On admettra que cette incertitude peut être levée en faisant l'hypothèse que le représentant de H utilisé dans la formulation de U et celui utilisé dans la formulation de V sont rigoureusement les mêmes. Ceci permet d'identifier HH' ($= \frac{1}{2}(H^2)'$) à $\frac{1}{2}H'$ (voir les travaux de J.F.Colombeau sur les fonctions généralisées) et d'effectuer les calculs comme s'il s'agissait de fonctions régulières classiques. En introduisant les expressions de U et de V dans le système cartographique, on obtient un résultat de la forme

$$H'(S) \left(\frac{\gamma U}{2} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\gamma V}{2} \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \text{termes bornés} = 0 \quad ,$$

et en se plaçant au niveau de la discontinuité, on obtient que le coefficient de terme de Dirac doit être nul, c'est à dire

$$\gamma U \frac{\partial S}{\partial x} + \gamma V \frac{\partial S}{\partial y} = 0 .$$

Ainsi, le saut $(\gamma U, \gamma V)$ est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right)$, lui même normal à la courbe de discontinuité. Il est donc colinéaire à la tangente à la courbe de discontinuité.

Le système cyclonique présente une symétrie de révolution, d'après les observations. On peut constater que ceci peut être obtenu lorsque le module du saut de vitesse

$$\sqrt{\gamma U^2 + \gamma V^2}$$

est constant, et lorsque S correspond à l'équation d'un cercle, plus précisément lorsque

$$S(x - u_*t, y - v_*t) = |x - u_*t|^2 + |y - v_*t|^2 - r_0^2 ,$$

le paramètre r_0 étant le rayon de l'oeil. Cette situation correspond à la géométrie attendue.

Cette symétrie de révolution induit une étude en coordonnées radiales, dont le pôle est le centre de l'oeil. On pose

$$U = u - u_* , \quad V = v - v_* ,$$

qui correspondent à des vitesses relatives, et on introduit les variables de Lagrange

$$X = x - u_*t , \quad Y = y - v_*t .$$

On pose ensuite

$$\xi = \sqrt{X^2 + Y^2} .$$

On cherche ensuite à expliciter une solution de la forme

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = a(\xi) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + b(\xi) \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} .$$

Ainsi la quantité $a(\xi)\xi$ représente la composante radiale de la vitesse relative (U, V) , et $b(\xi)\xi$ représente sa composante transverse.

On introduit ces quantités dans l'expression suivante du système cartographique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= (\sigma_* - k) U + \omega_0 \sin\phi_* V , \\ \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} &= (\sigma_* - k) V - \omega_0 \sin\phi_* U , \end{aligned}$$

obtenue en utilisant le fait que u_* et v_* sont supposés constants. Après quelques étapes de calcul différentiel, on obtient la relation vectorielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = (a(\xi)a'(\xi)\xi + a(\xi)^2 - b(\xi)^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (a(\xi)b'(\xi)\xi + 2a(\xi)b(\xi)) \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} .$$

En identifiant avec le second membre du système cartographique mis sous la forme

$$((\sigma_* - k) a(\xi) + \omega_0 \sin\phi_* b(\xi)) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + ((\sigma_* - k) b(\xi) - \omega_0 \sin\phi_* a(\xi)) \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} ,$$

on obtient deux équations différentielles :

$$a(\xi) a'(\xi) \xi + a(\xi)^2 - b(\xi)^2 = (\sigma_* - k) a(\xi) + \omega_0 \sin\phi_* b(\xi) ,$$

et

$$a(\xi) b'(\xi) \xi + 2 a(\xi) b(\xi) = (\sigma_* - k) b(\xi) - \omega_0 \sin\phi_* a(\xi) .$$

La résolution de ces deux équations différentielles doit se faire sur un intervalle borné inclus dans $[0, +\infty]$, de la forme $]R_{oeil}, R_{ext}]$, où R_{oeil} est le rayon de l'oeil et donc aussi la position du mur de l'oeil, et R_{ext} est un rayon assez grand pour inclure la globalité du cyclone. En pratique, R_{oeil} correspond à quelques dizaines de kilomètres, et R_{ext} à quelques centaines de kilomètres.

On impose une vitesse relative nulle en R_{ext} , c'est à dire

$$a(R_{ext}) = 0 \quad , \quad b(R_{ext}) = 0 \quad .$$

Le système admet bien entendu la solution triviale $a(\xi) = 0$, $b(\xi) = 0$, qui correspond à la situation "sans cyclone", qui est bien heureusement la plus fréquente. Dans le cas d'un cyclone, on s'attend à une bifurcation en $\xi = R_{ext}$ vers une solution non nulle. Pour cela, on introduit un **facteur géostrophique** noté $\zeta(\xi)$, et défini par

$$\zeta(\xi) = -\frac{b(\xi)}{a(\xi)} \quad \text{pour } \xi < R_{ext} \quad , \quad \zeta(R_{ext}) = \zeta_0 \quad ,$$

où ζ_0 est une donnée permettant de lever l'indétermination de $\zeta(\xi)$ lorsque ξ devient proche de R_{ext} . Ce facteur mesure la déviation par rapport à la direction radiale : on attend une composante $a(\xi)$ négative pour assurer une convergence vers le centre du cyclone et une déviation vers la droite, dans l'hémisphère nord, due à la force géostrophique ou force de Coriolis, c'est à dire une composante $b(\xi)$ positive. Ainsi, le facteur géostrophique $\zeta(\xi)$ est positif dans l'hémisphère nord, et il convient alors de choisir une valeur strictement positive pour ζ_0 . Dans l'hémisphère sud, la déviation se fait vers la gauche, ce qui se traduit par une composante $b(\xi)$ négative, et un facteur géostrophique $\zeta(\xi)$ négative, et donc une donnée ζ_0 négative.

En introduisant $\zeta(\xi)$ dans la seconde équation, il vient

$$a(\xi) (a(\xi)\zeta(\xi))' \xi + 2 a(\xi)^2 \zeta(\xi) = (\sigma_* - k) a(\xi) \zeta(\xi) + \omega_0 \sin\phi_* a(\xi) \quad ,$$

où on peut effectuer une simplification par $a(\xi)$, et obtenir l'équation

$$(a(\xi)\zeta(\xi))' \xi + 2 a(\xi) \zeta(\xi) = (\sigma_* - k) \zeta(\xi) + \omega_0 \sin\phi_* \quad .$$

On observe que $a(\xi) = 0$ n'est plus une solution possible de cette équation.

On multiplie cette dernière équation par $b(\xi)$, que l'on retranche ensuite de la première, pour obtenir

$$\xi \frac{d}{d\xi} (a^2 + b^2) + 2 (a^2 + b^2) \left(1 - \frac{\sigma_* - k}{a(\xi)}\right) = 0 \quad .$$

Le terme $a^2 + b^2$ représente l'énergie cinétique, et on observe qu'il s'accroît démesurément lorsque $a(\xi)$ s'approche de zéro (rappelons que $a(\xi)$ est attendu négatif) sous la condition

$$\sigma_* > k \quad .$$

En introduisant le facteur $\zeta(\xi)$ dans la première équation, on obtient, après simplification par $a(\xi)$, l'équation différentielle

$$\xi a'(\xi) + a(\xi) (1 - \zeta(\xi)^2) = (\sigma_* - k) - \omega_0 \sin\phi_* \zeta(\xi) \quad .$$

Pour garantir

$$a(\xi) < 0 \quad ,$$

on doit s'assurer la croissance de $a(\xi)$ au voisinage de $\xi = R_{ext}$, où $a(\xi)$ est nul. Ceci procure une condition sur la valeur de ζ_0 qui traduit qu'à ce niveau le second membre doit être positif, ce qui donne

$$\zeta_0 < \frac{\sigma_* - k}{\omega_0 \sin \phi_*} \quad .$$

On peut interpréter cette condition : si le coefficient d'absorption σ_* est trop faible, le mécanisme de bifurcation en $\xi = R_{ext}$ ne peut pas avoir lieu.

On peut aussi déduire une équation sur $\zeta(\xi)$ de ce qui précède, qui s'écrit

$$\zeta'(\xi) = \left(\frac{\omega_0 \sin \phi_*}{a(\xi)} - \zeta(\xi) \right) (1 + \zeta(\xi)^2) \quad .$$

Si $a(\xi) < 0$, cette équation assure la (forte) décroissance de $\zeta(\xi)$, c'est à dire que $\zeta(\xi)$ va augmenter considérablement lorsque ξ décroît, et donc toujours rester positive pour adopter une pente et une valeur infinie lorsque $a(\xi)$ devient nulle. En se reportant, après cette remarque, sur l'équation

$$\xi a'(\xi) + a(\xi) (1 - \zeta(\xi)^2) = (\sigma_* - k) + \omega_0 \sin \phi_* \zeta(\xi) \quad ,$$

on remarque que le terme $a(\xi) (1 - \zeta(\xi)^2)$ devient prépondérant et positif, ce qui implique nécessairement que $a'(\xi)$ doit s'annuler en un point ξ_1 situé dans l'intervalle $]0, R_{ext}[$, et ensuite devenir de plus en plus fortement négatif. Ainsi, avant d'atteindre le point $\xi = 0$, il va se trouver un point ξ_m pour lequel $a(\xi_m) = 0$. Ce point correspond à la position du mur de l'oeil, puis que la vitesse n'a plus de composante radiale mais conserve une composante transvers $b(\xi_m) \neq 0$.

On procède maintenant à un test numérique pour vérifier ce comportement. On choisit un rayon extérieur R_{ext} entre 100 et 300 km, et on discrétise les deux équations différentielles suivantes,

$$(\xi b(\xi))' + b(\xi) + \omega_0 \sin \phi_* - (\sigma_* - k)\zeta(\xi) = 0 \quad ,$$

$$(\xi a(\xi))' - \zeta(\xi)^2 a(\xi) - (\sigma_* - k) - \omega_0 \sin \phi_* \zeta(\xi) = 0 \quad ,$$

liées par la relation

$$\zeta(\xi) = -\frac{b(\xi)}{a(\xi)} \quad .$$

On se donne un entier N assez grand, puis on définit le pas de discrétisation

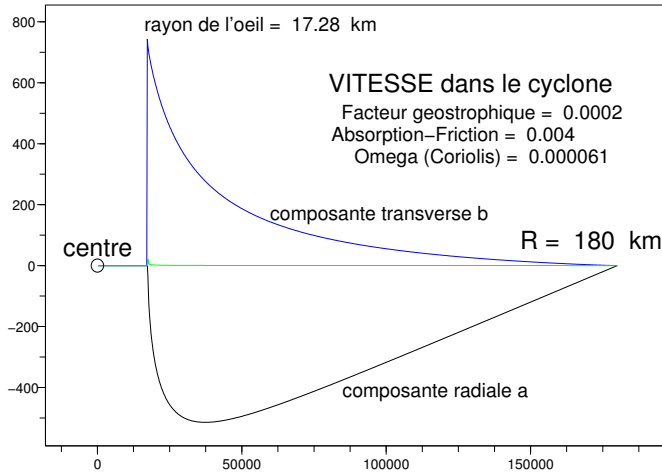
$$h = \frac{R_{ext}}{N} \quad ,$$

et les points de discrétisation

$$\xi_j = jh \quad .$$

On approche ensuite $b(\xi_j)$ par b_j , $a(\xi_j)$ par a_j et $\zeta(\xi_j)$ par ζ_j calculés par la méthode d'Euler rétrograde : on calcule les valeurs d'indice j à partir des valeurs d'indice $j + 1$, en démarrant avec

$$a_N = 0 \quad , \quad b_N = 0 \quad , \quad \zeta_N = \zeta_0 > 0 \quad ,$$



par le schéma numérique

$$b_j = \frac{1}{\xi_j} (\xi_{j+1} b_{j+1} - \omega_0 \sin \phi_* h + b_{j+1} h + (\sigma_* - k) \zeta_{j+1} h) ,$$

$$a_j = \frac{1}{\xi_j} (\xi_{j+1} a_{j+1} - \zeta_{j+1}^2 a_{j+1} h - (\sigma_* - k) h + \omega_0 \sin \phi_* \zeta_{j+1} h) ,$$

avec

$$\zeta_j = - \frac{b_j}{a_j} .$$

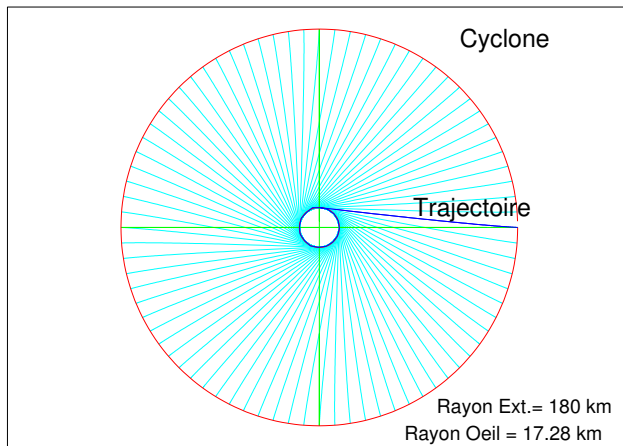
Le calcul est arrêté à l'indice j_0 réalisant

$$a_{j_0} \geq 0 > a_{j_0+1} .$$

La valeur ξ_{j_0} correspondante détermine la position du mur de l'oeil.

La figure ci dessus représente les résultats d'un tel calcul. Le paramètre le plus sensible est effectivement le facteur géostrophique ζ_0 pris ici égal à $2 \cdot 10^{-4}$. Il contrôle surtout le rayon de l'oeil, compte tenu bien entendu de la valeur de R_{ext} . Les termes de Coriolis, en $\omega_0 \sin \phi_*$, et de friction-absorption, en $(\sigma_* - k)$, jouent cependant un rôle non négligeable.

Ce champ de vitesse permet de reconstituer une trajectoire caractéristique, depuis la circonférence externe, de rayon R_{ext} jusqu'à l'oeil. On vérifie bien l'orthogonalité de cette trajectoire avec la circonférence externe, puis sa tangence avec le mur de l'oeil. On note cependant une forte



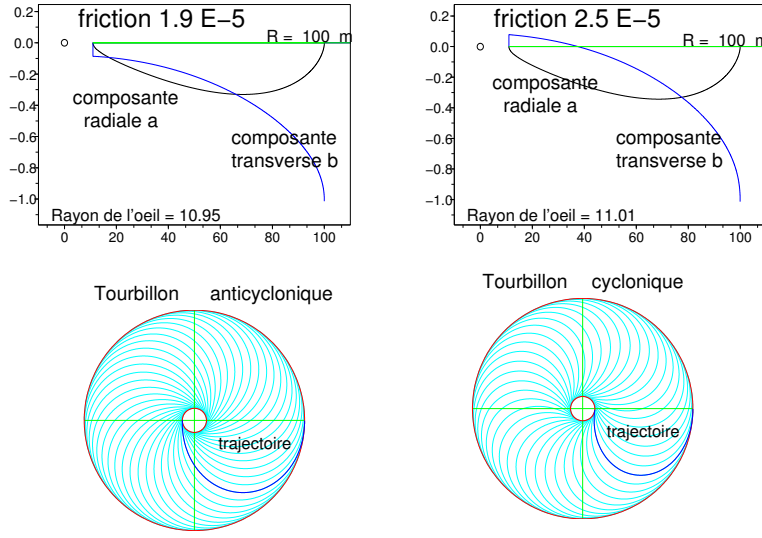
valeur les vitesses au niveau du mur de l'oeil, plus importante que ce qui est communément attendu, qui peut s'expliquer par la linéarité du terme d'absorption friction. On peut en effet penser qu'à ces grandes vitesses, le terme d'absorption devienne plus petit et le terme de friction plus grand, ce qui va inverser le rôle joué par le coefficient $\sigma_* - k$. La figure ci dessus représente un échantillon de trajectoires, reproduites par simples rotations de la trajectoire initiale.

Le rôle essentiel du facteur géostrophique a été de provoquer une bifurcation de la solution (en champ de vitesses) au niveau du périmètre extérieur, par rapport au champ courant (u_*, v_*) . L'enroulement des caractéristiques autour de l'oeil se fait toujours dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, dans l'hémisphère nord. C'est bien entendu le contraire qui apparait dans l'hémisphère sud.

6.5 Les tornades et tourbillons

Les phénomènes de tourbillon, que l'on peut observer en hydraulique par exemple, ou dans l'atmosphère par temps chaud et dont le comportement extrême constitue une tornade, sont analogues aux cyclones, mais de dimension et de durée de vie beaucoup plus réduite. Par contre, les vitesses peuvent être bien supérieures. La différence provient essentiellement du comportement au niveau du périmètre extérieur. On n'a plus une bifurcation comme dans le cas des cyclones, mais un choc qui provoque une mise en vitesse instantanée, et traduit un effet de cisaillement. La vitesse change de direction plus rapidement, il n'y a plus à proprement parler de facteur géostrophique (on peut estimer qu'il est devenu très grand) et son utilisation devient inutile pour effectuer les calculs. On

néglige également le phénomène d'absorption.



En fonction de la friction, dans l'hémisphère nord, l'enroulement des caractéristiques se fait soit dans le sens des aiguilles d'une montre (friction plus faible), ce qui caractérise un **tourbillon anticyclonique**, soit dans le sens contraire (friction plus forte) pour un **tourbillon cyclonique**. Les équations restent les mêmes que pour le cyclone, auxquelles on ajoute une force d'attraction centripète représentant l'aspiration centrale de la matière, plus ou moins forte selon la violence du phénomène. On note encore R_{ext} le rayon extérieur, et (u_*, v_*) la vitesse du vent environnant, et la circonférence extérieure correspond effectivement à un choc. A la différence du cas du cyclone, la vitesse relative $(u - u_*, v - v_*)$ n'est pas nulle sur la face interne de ce choc, et il va être possible d'utiliser les caractéristiques pour obtenir les trajectoires allant du choc extérieur au mur de l'oeil, qui est lui même un autre choc. Ces caractéristiques sont solution du système différentiel

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(t) \quad , \quad u'(t) = -k (u(t) - u_*) + \omega (v(t) - v_*) \quad , \\ y'(t) &= v(t) \quad , \quad v'(t) = -k (v(t) - v_*) - \omega (u(t) - u_*) \quad . \end{aligned}$$

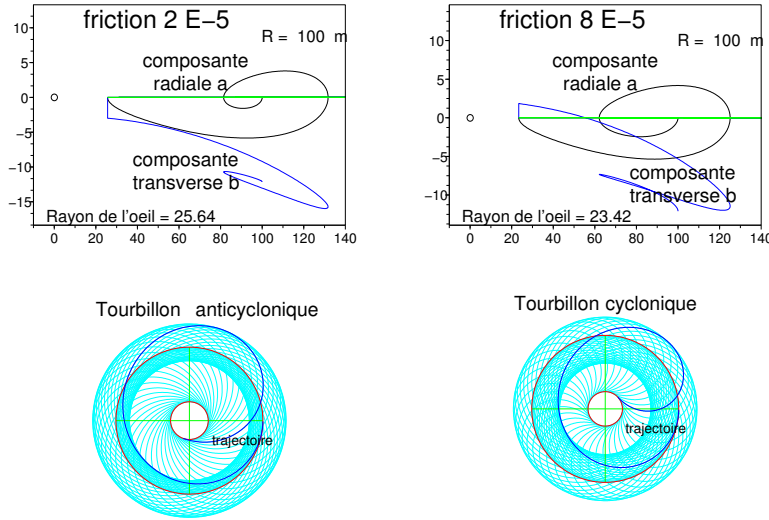
Le paramètre ω représente la force de Coriolis à laquelle on peut ajouter une force d'attraction centripète d'aspiration, de la forme

$$\omega = \omega_0 \sin \phi_* + \omega_1 \quad ,$$

où ϕ_* est la latitude de référence. On note (x_0, y_0) la position initiale, et on s'intéresse à une caractéristique de référence, par exemple celle issue du point $(x_0 + R_{ext}, y_0)$, les autres seront ensuite obtenues par rotation. Les conditions sur la vitesse sont de la forme

$$u = u_* \text{ , } v = v_* - v_0 \text{ en } t = 0, \text{ lorsque } x = x_0 + R_{ext} \text{ , } y = y_0 \text{ .}$$

La solution se calcule explicitement et on obtient les résultats ci dessous.



La démarche fait apparaître deux étapes. La première consiste à déterminer le champ de vitesses (u_*, v_*) pour en déduire la trajectoire du phénomène. La seconde consiste à intégrer le système complet pour déterminer le comportement à l'intérieur du phénomène. On ne fait que résoudre un système différentiel, et Il convient de rapprocher notre démarche de la technique habituelle de résolution de ces systèmes. La recherche d'une solution particulière de l'équation sans second membre correspond à notre détermination de la trajectoire du phénomène global. La recherche de la solution générale de l'équation homogène correspond à la détermination du comportement interne. Cependant, le calcul s'arrête lorsque la trajectoire devient orthogonale à la direction radiale : on retrouve l'aspect non linéaire du problème, avec la rentrée des trajectoires, en fait des caractéristiques dans le choc qui constitue le mur de l'oeil du tourbillon.

Nous avons noté une première différence entre les tourbillons et les cyclones : le bord extérieur correspond à un choc pour le tourbillon, à une bifurcation pour le cyclone. Dans ce dernier cas, les vitesses près du bord sont celles du champ de vitesse environnant (u_*, v_*) , donc telles que $(u - u_*, v - v_*)$ soit faible. Il n'y a pas d'inertie, et l'aspiration centrale est prépondérante, et vient

contribuer, avec la force géostrophique, c'est à dire le terme de Coriolis, à une légère déviation vers la droite (hémisphère nord). Dans le cas du tourbillon, la vitesse est essentiellement transverse, près du bord extérieur, et relativement forte. L'aspiration va provoquer un détournement vers le centre, plus ou moins rapide selon la friction. Pour de faibles frictions, l'enroulement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, et pour de plus fortes frictions, il peut se faire dans l'autre sens. Il y a bien entendu une position intermédiaire pour laquelle l'oeil est théoriquement réduit à un seul point.

Chapitre 7

Les tsunamis

On se propose dans ce chapitre de modéliser chacune des étapes de la vie d'un tsunami. Sa génération est provoquée par une forte contrainte, relativement à la pression nominale, en général d'origine sismique. Cette contrainte se transforme en un train d'ondes de compression qui se propagent verticalement, jusqu'à atteindre la surface de l'océan. A ce niveau, situé à la verticale de l'épicentre, et si la longueur d'onde est suffisante, chaque onde de compression se transforme en une vague qui va ensuite se propager radialement. Nous étudierons ensuite le profil de la vague à l'approche du littoral, et notamment l'effet de vidange sur les plages, puis sa propagation sur le sol, au delà de la ligne d'eau habituelle.

7.1 La génération du tsunami.

7.1.1 L'effet du séisme : une application de la détonique.

Le déplacement de l'onde de choc provoquée par le séisme ou une autre source, du fond vers la surface de l'océan, peut être représenté par un modèle de type **vitesse-pression**. Les variations de la densité de l'eau restent infimes, et inexploitable car elles rendraient instable toute application numérique. Par contre, les pressions pouvant devenir importantes, on conserve une liaison entre la pression et la vitesse du son $c(p)$.

La courbe d'Hugoniot introduite en section 4.7 a été interprétée comme la courbe représentative d'un invariant de Riemann, pour le problème homogène. Elle est de la forme

$$w(p) = \pm \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \beta_0 p} - 1 \right) ,$$

avec $\alpha_0 = 429$ et $\beta_0 = 2.84 \cdot 10^{-9}$. Le paramètre α_0 a la dimension d'une vitesse et β_0 correspond à l'inverse d'une énergie. Rappelons que ces constantes α_0 et β_0 sont liées à la densité $\rho_0 = 998 \text{ kg m}^{-3}$ et à la densité de référence $c_0 = 1647 \text{ m s}^{-1}$ par la relation

$$\alpha_0 \beta_0 \rho_0 c_0 = 2 .$$

Rappelons rapidement la démarche : l'expression de sa dérivée

$$w'(p) = \pm \frac{\alpha_0 \beta_0}{2\sqrt{1 + \beta_0 p}}$$

est à comparer à l'équation différentielle donnant les invariants de Riemann du modèle vitesse pression constitué de l'équation dynamique homogène, portant sur la vitesse notée w ,

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

et de la loi de Hooke portant sur la pression notée p ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 c(p)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

c'est à dire

$$w'(p) = \pm \frac{1}{\rho_0 c(p)} .$$

En identifiant les deux expressions de $w'(p)$ on obtient

$$\frac{1}{\rho_0 c(p)} = \frac{\alpha_0 \beta_0}{2 \sqrt{1 + \beta_0 p}} ,$$

d'où la relation

$$c(p) = c_0 \sqrt{1 + \beta_0 p} .$$

Nous allons adopter cette relation comme **loi d'état**, valable à toutes les profondeurs de l'océan.

En pratique, un terme de gravité et un terme de friction, de paramètre $k > 0$, interviennent dans l'équation dynamique, qui prend la forme

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g + k |w| w = 0 ,$$

la loi de Hooke restant inchangée. On situe le phénomène à une latitude telle que $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$. La valeur du paramètre de friction k sera évaluée empiriquement.

7.1.2 La modélisation conservative $q - m$

La présence d'un terme source incite à rechercher une formulation $q - m$, en interprétant w comme une fonction de p pour une onde régulière, puis en recherchant une expression $q = q(p)$ telle que

$$m = q w = A q - B ,$$

pour des constantes A et B déterminées par cette onde. La démarche est la même que celle adoptée au Chapitre 5.

En posant $w = w(p)$ dans l'équation dynamique, il vient

$$\rho_0 w'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g + k |w| w = 0 ,$$

et pour la loi de Hooke,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + w(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho_0 c(p)^2 w'(p) \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

On multiplie cette équation par $\rho_0 w'(p)$ et on la soustrait à la précédente pour obtenir

$$(1 - \rho_0^2 c(p)^2 w'(p)^2) \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g + k |w| w = 0 .$$

On introduit une fonction $\psi(p)$ telle que

$$\psi'(p) = \frac{1 - \rho_0^2 c(p)^2 w'(p)^2}{\rho_0 g + k |w| w}$$

pour obtenir une **équation de profil**

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0 .$$

En intégrant par rapport à z on obtient

$$\psi(p) + z + K(t) = 0 ,$$

où $K(t)$ est une constante d'intégration, qui dépend éventuellement de t . On dérive par rapport à t pour obtenir

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial t} + K'(t) = 0 .$$

On utilise la loi de Hooke pour écrire

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - (w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) \frac{\partial p}{\partial z} ,$$

et obtenir

$$(w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) \psi'(p) \frac{\partial p}{\partial z} + K'(t) = 0 .$$

Or, d'après l'équation de profil,

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial z} = -1 .$$

On en déduit

$$K'(t) = - (w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) ,$$

qu'on dérive par rapport à z pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial z} (w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} (w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

On sait, par l'équation de profil, que

$$\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0 ,$$

donc

$$\frac{d}{dp} (w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p)) = 0 .$$

Une première intégration conduit à une équation différentielle de la forme

$$w(p) + \rho_0 c(p)^2 w'(p) = A ,$$

où A est une constante. La solution générale de cette dernière équation différentielle est de la forme

$$w(p) = A - B (1 + \beta_0 p)^{-\frac{1}{\beta_0 \rho_0 c_0^2}} ,$$

qui peut aussi s'écrire

$$w(p) = A - B (1 + \beta_0 p)^{-\frac{\alpha_0}{2c_0}} .$$

On pose

$$q = q(p) = (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \quad \text{où} \quad \frac{\alpha_0}{2c_0} \simeq 0.13 ,$$

et on observe bien que

$$m = q w = Aq - B .$$

On retrouve une similitude avec la notion de système physiquement réaliste, où la quantité q est sans dimension, et correspond à une densité de contrainte.

Il reste à vérifier qu'il s'agit bien d'un système physiquement réaliste, en retrouvant l'équation de transport de la quantité q par le flux m , puis une équation dynamique liant m et q . On calcule

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} = \frac{\alpha_0 \beta_0}{2c_0} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}-1} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

que l'on multiplie par

$$1 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 c_0^2} , \quad \text{en remarquant que} \quad \frac{\alpha_0 \beta_0 \rho_0 c_0^2}{2 \rho_0 c_0^3} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} ,$$

pour obtenir

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}-1} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 c(p)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ,$$

d'après la loi de Hooke. L'équation de transport est bien vérifiée.

Pour obtenir l'équation dynamique, on calcule

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2w \frac{\partial m}{\partial z} = q \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w^2 \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{q}{\rho_0} \left(\rho_0 g + k |w| w + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + w^2 \frac{\partial q}{\partial z} ,$$

où

$$\frac{q}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2c_0}{\alpha_0 \beta_0 \rho_0} (1 + \beta_0 p) \frac{\partial q}{\partial z} = c_0^2 (1 + \beta_0 p) \frac{\partial q}{\partial z} = c^2 \frac{\partial q}{\partial z} ,$$

en posant

$$c = c_0 \sqrt{1 + \beta_0 p} = c_0 q^{\frac{c_0}{\alpha_0}} .$$

On en déduit l'équation dynamique

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 w \frac{\partial m}{\partial z} + (c^2 - w^2) \frac{\partial q}{\partial z} + g q + \frac{k}{\rho_0} |w| w = 0 .$$

On obtient bien un système physiquement réaliste, et il est intéressant de remarquer que la loi de Hooke a été transformée en équation de transport et que cette démarche, associant le terme source, a conduit à la même expression du paramètre q que dans le cas homogène étudié en section 4.7. La quantité q joue le rôle d'une densité liée à la contrainte, différente de la masse volumique classique. On retrouve les équations d'Euler, pour un paramètre γ égal à

$$\gamma_0 = 1 + 2 \frac{c_0}{\alpha_0} \simeq 8.678$$

très différente des valeurs habituelles de ce paramètre pour la dynamique des gaz. La pression associée est de la forme

$$P(q) = \frac{q c^2}{\gamma_0} = \frac{c_0^2}{\gamma_0} q^{\gamma_0} .$$

Comme q est sans dimension, la quantité m a la dimension d'une vitesse, et le paramètre de friction n'est plus sans dimension, et correspond à une densité par mètre, soit $kg m^{-2}$ en dimension un d'espace.

7.1.3 Le calcul du profil, et l'importance de la friction

Lorsque le coefficient de friction est nul ($k = 0$), le profil d'une onde régulière est obtenu en inversant

$$\psi(q) = z - A t ,$$

pour une fonction de profil inverse $\psi(q)$ telle que

$$\psi'(q) = \frac{B^2 - c^2 q^2}{g q^3} = \frac{B^2}{g q^3} - \frac{c_0^2}{g} q^{2 \frac{c_0}{\alpha_0} - 1} ,$$

et donc de la forme

$$\psi(q) = C t e - \frac{B^2}{2 g q^2} - \frac{\alpha_0 c_0}{2 g} q^{2 \frac{c_0}{\alpha_0}} .$$

Les constantes A et B sont déterminées par le choix d'un état de référence

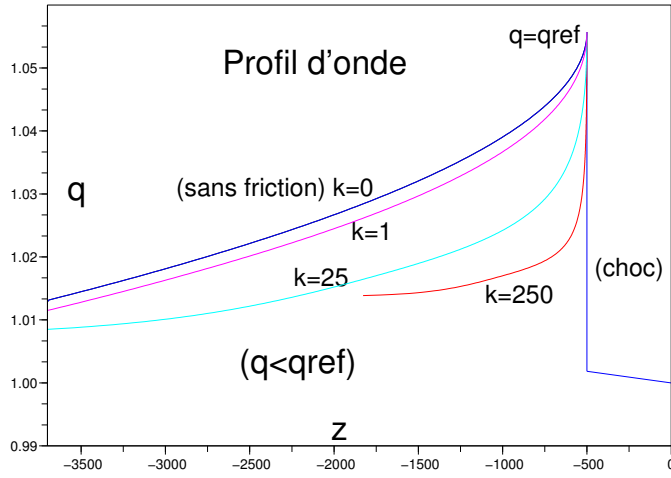
$$M_{ref} = (q_{ref}, m_{ref}) ,$$

pour évaluer

$$w_{ref} = \frac{m_{ref}}{q_{ref}} , \quad \text{puis} \quad A = w_{ref} + c_{ref} , \quad B = q_{ref} c_{ref} = c_0 q_{ref}^{\frac{c_0}{\alpha_0} + 1} .$$

Avec ces notations, on obtient

$$\psi(q) = C t e - \frac{c_0^2 q_{ref}^{2 \frac{c_0}{\alpha_0} + 2}}{2 g q^2} - \frac{\alpha_0 \beta_0}{2 g} q^{2 \frac{c_0}{\alpha_0}} ,$$



et on observe que

$$\psi(q) \longrightarrow -\infty \text{ lorsque } q \longrightarrow 0 .$$

On constate ainsi qu'en grande profondeur, les valeurs de q peuvent devenir inférieures à la valeur $q = 1$, ce qui correspond à des pressions négatives. La valeur de m devient négative, dès que

$$q < \frac{c_0^{\frac{c_0}{\alpha_0}+1} q_{ref}}{w_{ref} + c_0^{\frac{c_0}{\alpha_0}} q_{ref}} ,$$

ce qui traduit une vitesse négative elle aussi. Notons que cette valeur de q reste supérieure à 1 lorsque

$$q_{ref} > 1 + \frac{w_{ref}}{c_{ref}} ,$$

ce qui constitue une valeur tout à fait réaliste.

Lorsque $k > 0$, le profil inverse $\psi(q)$ est tel que

$$\psi'(q) = \frac{B^2 - c(q)^2 q^2}{g q^3 + \frac{k q}{\rho_0} |Aq - B| (Aq - B)} ,$$

où

$$A = w_{ref} + c_{ref} , \quad B = q_{ref} c_{ref} ,$$

comme précédemment.

Dans le cas de vitesses négatives, le dénominateur admet des racines, situées sur la droite

$$m = - \sqrt{\frac{g \rho_0}{k}} q$$

dans le plan de phase. On obtient en particulier la racine associée à la valeur de référence à son intersection avec la droite

$$m = A q - B ,$$

ce qui conduit à la valeur

$$q_* = \frac{B}{A + \sqrt{\frac{g \rho_0}{k}}} = \frac{c_0 q_{ref}^{1+\frac{c_0}{\alpha_0}}}{w_{ref} + c_0 q_{ref}^{\frac{c_0}{\alpha_0}} + \sqrt{\frac{g \rho_0}{k}}} < q_{ref} .$$

La figure précédente représente plusieurs profils d'ondes associés à un même état de référence

$$m_{ref} = 81.985 \quad , \quad q_{ref} = 1.0557 \quad , \quad w_{ref} = 77.656 \quad ,$$

et pour des coefficients de friction différents. On constate que la friction agit en redressant le profil derrière le front, représenté ici par un choc et en imposant une valeur plancher à la variable q suffisante pour éviter de générer des pressions négatives en forte profondeur. Dans ce test, le calcul de $\psi(q)$ a été effectué de façon exacte pour $k = 0$, et approchée pour $k > 0$. Il permet de conclure que la friction doit absolument être prise en compte, avec des valeurs de k relativement importantes. Cependant les profils obtenus par ne sont pas compatibles avec la conservation des états d'équilibre. Il faut reprendre l'étude dans cette perspective, tout en conservant les conclusions relatives à la friction.

7.1.4 L'onde sismique et l'équilibre géostrophique

Les profils d'onde obtenus par l'étude de la section précédente ne sont pas compatibles avec la conservation de l'équilibre géostrophique, lorsque la vitesse est nulle et reste nulle. Les équations sont la loi de Hooke transformée en équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0 ,$$

et l'équation dynamique

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 w \frac{\partial m}{\partial z} + (c^2 - w^2) \frac{\partial q}{\partial z} + g q + \frac{k q}{\rho_0} |w| w = 0 ,$$

où

$$c(q) = c_0 q^{\frac{c_0}{\alpha_0}}$$

et q est liée à la pression par

$$q = q(p) = (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} .$$

A l'équilibre, ces équations se réduisent à

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad , \quad c(q)^2 \frac{\partial q}{\partial z} + g q = 0 \quad ,$$

ou encore en explicitant $c(q)$, sachant $q \neq 0$,

$$c_0^2 q^{2\frac{c_0}{\alpha_0}-1} \frac{\partial q}{\partial z} + g = 0 \quad .$$

Cette équation s'intègre immédiatement pour donner

$$\frac{\alpha_0 c_0}{2} q^{2\frac{c_0}{\alpha_0}} + g z = Cte \quad .$$

Or

$$q^{2\frac{c_0}{\alpha_0}} = 1 + \beta_0 p \quad ,$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha_0 c_0}{2} (1 + \beta_0 p) + g z = Cte \quad .$$

On peut maintenant fixer la constante d'intégration en utilisant la donnée de pression atmosphérique p_a supposée constante, en $z = 0$. On obtient

$$Cte = \frac{\alpha_0 c_0}{2} (1 + \beta_0 p_a) \quad ,$$

d'où

$$\frac{\alpha_0 \beta_0 c_0}{2} (p - p_a) + g z = 0 \quad .$$

En utilisant la condition

$$\alpha_a \beta_0 c_0 \rho_0 = 2 \quad ,$$

il reste

$$p = p_a - \rho_0 g z \quad .$$

Ainsi, le profil à l'équilibre est donné par l'expression

$$q_0(z) = \left(1 + \beta_0 (p_a - \rho_0 g z) \right)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \quad .$$

La vitesse d'onde associée est donnée par

$$c(q_0(z)) = c_0 q_0(z)^{\frac{c_0}{\alpha_0}} = c_0 \sqrt{1 + \beta_0 (p_a - \rho_0 g z)} \quad ,$$

et on constate immédiatement que cette vitesse d'onde dépend de la profondeur z . De ce fait, la démarche aboutissant à une expression de la forme $m = Aq - B$ n'est pas applicable car elle exigeait une indépendance de c par rapport à z . Ce cas est similaire à celui rencontré lors des écoulements littoraux, et de la même façon, nous allons utiliser la **variable d'écart**

$$\eta = q - q_0 \quad ,$$

et chercher des profils de solution réalisant

$$m = A \eta - B ,$$

avec A et B constants. Pour rester compatible avec les états d'équilibre, on doit retrouver $m = 0$ lorsque l'écart $\eta = 0$. Ceci implique

$$B = 0 .$$

La vitesse de l'eau est toujours donnée par

$$w = \frac{m}{q} = A \left(1 - \frac{q_0}{q} \right) .$$

Comme q_0 ne dépend pas de t , on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial m}{\partial z} ,$$

et l'équation de transport se transforme en une équation linéaire

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 .$$

D'autre part,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = A \frac{\partial \eta}{\partial t} = - A^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} , \quad \frac{\partial m}{\partial z} = A \frac{\partial \eta}{\partial z} .$$

De plus le profil d'équilibre q_0 vérifie

$$q_0'(z) = - g \frac{q_0(z)}{c(q_0(z))^2} ,$$

et donc

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + q_0'(z) = \frac{\partial \eta}{\partial z} - g \frac{q_0}{c(q_0)^2} .$$

On introduit ces différentes expressions dans l'équation dynamique

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 w \frac{\partial m}{\partial z} + (c^2 - w^2) \frac{\partial q}{\partial z} + g q + \frac{k q}{\rho_0} |w| w = 0 ,$$

pour obtenir, après quelques simplifications,

$$\left(c(q)^2 - A^2 \frac{q_0^2}{q^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + g q + g \frac{q_0}{c(q_0)^2} \left(A^2 \left(1 - \frac{q_0}{q} \right)^2 - c(q)^2 \right) + \frac{k q}{\rho_0} \frac{A^2}{q^2} (q - q_0) |q - q_0| = 0 .$$

On multiplie maintenant par q^2 pour obtenir après regroupement de termes et en utilisant l'expression de $c(q_0)$,

$$(q^2 c(q)^2 - q_0^2 A^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} + g \left(q^3 \left(1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2 \frac{c_0}{\alpha_0} - 1} \right) + \frac{A^2 q_0}{c(q_0)^2} (q - q_0)^2 \right) + \frac{k q}{\rho_0} A^2 (q - q_0) |q - q_0| = 0 .$$

L'intégration de cette équation donne les profils réguliers de l'onde. On s'attend à un profil croissant, lorsque $q > q_0$, c'est à dire

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} > 0 .$$

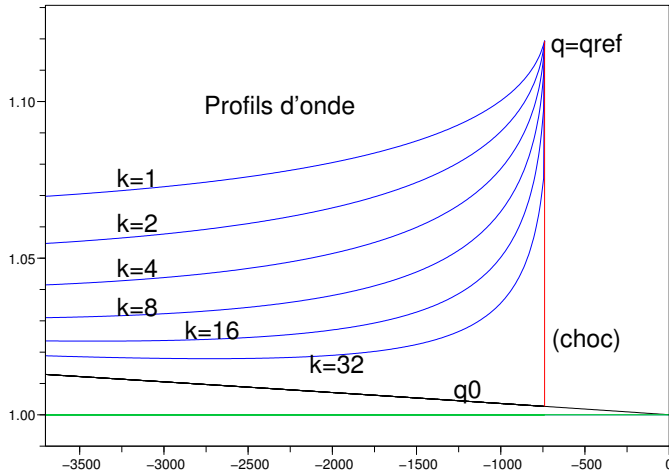
La vitesse de référence A est a priori bien supérieure à $c(q)$ et donc, en pratique, le coefficient de $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ est négatif :

$$q^2 c(q)^2 - q_0^2 A^2 < 0 .$$

Il admet cependant une racine, supérieure à q_0 , qui n'est jamais atteinte en pratique ; elle correspond à une valeur asymptotique approchée lorsque $z \rightarrow -\infty$. Les deux termes quadratiques restent positifs, le terme de friction étant largement prépondérant. Le terme

$$g q^3 \left(1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2 \frac{c_0}{\alpha_0} - 1} \right)$$

est toujours négatif, et compensé par le terme de friction, à condition que le coefficient de friction soit suffisant. La croissance de l'écart de profil est alors bien assurée.



La série de tests présentée ici correspond à une valeur de référence $q_{ref} = 1.1296$, pour une profondeur de 3700 mètres, soit une augmentation de 1500% de la pression au fond de l'océan, ce qui est considérable. Le champ de vitesse w_{ref} progresse de quelques mètres par seconde, au fond de

l'océan, pour atteindre pres de 300 mètres par secondes à proximité du choc. Les tests effectués pour des coefficients de friction trop petits (observés ici pour $k < 0.15$) produisent des profils d'écart décroissants, ce qui valide la remarque sur le rôle important de la friction. Le "choc" est ici hypothétique ; en effet, nous verrons par la suite qu'il progresse nettement moins vite que le profil de l'écart, ce qui va progressivement en réduire l'amplitude. Les valeurs effectives du champ de vitesse w_{ref} seront ainsi nettement plus réduites, même à proximité du choc.

La détermination de A se fait en utilisant l'état de référence q_{ref} et la valeur de l'équilibre au fond de l'océan, de profondeur notée z_f . On a

$$A = w_{ref} + c_{ref} \quad , \quad w_{ref} = A \frac{q_{ref} - q_0(z_f)}{q_{ref}} \quad ,$$

d'où

$$A = A \left(1 - \frac{q_0(z_f)}{q_{ref}} \right) + c_{ref} \quad ,$$

dont on déduit

$$A = c_{ref} \frac{q_{ref}}{q_0(z_f)} \quad .$$

On en déduit

$$w_{ref} = c_{ref} \left(\frac{q_{ref}}{q_0(z_f)} - 1 \right) \quad .$$

7.1.5 L'effet de seuil : une vague ou pas ?

La validité du modèle de Saint -Venant a déjà été évoquée en section 5.7, à propos des "Rogue waves", pour les océans profonds. En notant H la profondeur de l'océan, la longueur d'onde λ_w des vagues doit satisfaire à une condition de la forme

$$\lambda_w \geq 2 N \frac{H \sqrt{gH}}{c_0} \quad .$$

Cette condition traduit le fait que sur la distance (horizontale) d'une longueur d'onde λ_w , il y a au moins N interactions soniques entre le fond et la surface. Le modèle de Saint-Venant est d'autant plus valable que N est grand. En pratique, on exige $N \geq 25$, ce qui induit par exemple une longueur d'onde supérieure à 21400 m pour une profondeur de 3700 m de l'océan.

Pour provoquer une vague de tsunami, il est donc nécessaire que l'amplitude du choc provenant d'une secousse sismique en profondeur soit suffisante pour soulever la surface de l'océan sur une surface correspondant à un disque présentant un diamètre suffisant. Cette onde sismique est précédée d'une onde de choc, dont l'amplitude diminue au cours de la progression vers la surface. Ceci provient du fait que cette onde de choc est moins rapide que l'onde sismique, et l'amplitude du choc s'en trouve diminuée à chaque instant. Pour des coefficients de friction non négligeables, le profil à l'arrière de l'onde est relativement raide, et la diminution de l'amplitude du choc est d'autant plus sensible.

A un instant t , on note $z(t)$ la position du choc, entre la côte du fond $z_f < 0$ et la surface $z = 0$. A l'avant du choc la densité de contrainte est égale à sa valeur d'équilibre, $q_0(z(t))$ et immédiatement derrière le choc, sa valeur, notée $q_s(t)$, est donnée par le profil d'onde

$$q_s(t) = \psi^{-1}(z(t) - At) .$$

La vitesse du choc $z'(t)$ est déterminée par la relation de Rankine-Hugoniot

$$z'(t) = \frac{w(z(t))}{2} + \frac{q_s(t) + q_0(z(t))}{2} Z(q_s(t), q_0(z(t))) ,$$

avec Z définie par

$$Z(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{1}{q_1 q_2} \frac{P(q_2) - P(q_1)}{q_2 - q_1}} ,$$

où

$$P(q) = \frac{c_0^2}{\gamma_0} q^{\gamma_0} \quad , \quad \gamma_0 = 1 + 2 \frac{c_0}{\alpha_0} = 1 + 4 s_0 \simeq 8.678 .$$

Il s'agit d'une équation différentielle qui s'intègre à partir du fond de l'océan, à l'instant initial. En exprimant la vitesse w en fonction de A et des densités de contrainte, on obtient

$$z'(t) = \frac{A}{2} \frac{q_s(t) - q_0(z(t))}{q_s(t)} + \frac{q_s(t) + q_0(z(t))}{2} Z(q_s(t), q_0(z(t))) , \quad z(0) = z_f .$$

Il reste à démontrer le résultat suivant :

Théorème 7.1.1 *L'onde sismique est plus rapide que l'onde de choc, elle même plus rapide que la vitesse du son $c(q_0(z(t)))$ à l'équilibre c'est à dire*

$$c_0 q_0(z(t))^{\frac{c_0}{\alpha_0}} < z'(t) < A .$$

Démonstration 1 *On fixe t et on note $q_s = q_s(t)$ et $q_0 = q_0(z(t))$. Il s'agit de montrer dans un premier temps*

$$z'(t) < A = c_0 q_{ref}^{\frac{c_0}{\alpha_0}} \frac{q_{ref}}{q_0(z_f)} ,$$

ou encore, en introduisant $\xi \in]q_0, q_{ref}[$ tel que

$$\frac{P(q_s) - P(q_0)}{q_s - q_0} = P'(\xi) = c_0^2 \xi^{\frac{2c_0}{\alpha_0}} ,$$

l'inégalité

$$\frac{q_s + q_0}{2\sqrt{q_s q_0}} c_0 \xi^{\frac{c_0}{\alpha_0}} < A \left(\frac{1}{2} + \frac{q_s}{2q_0} \right) .$$

Cette inégalité se réduit après simplification à

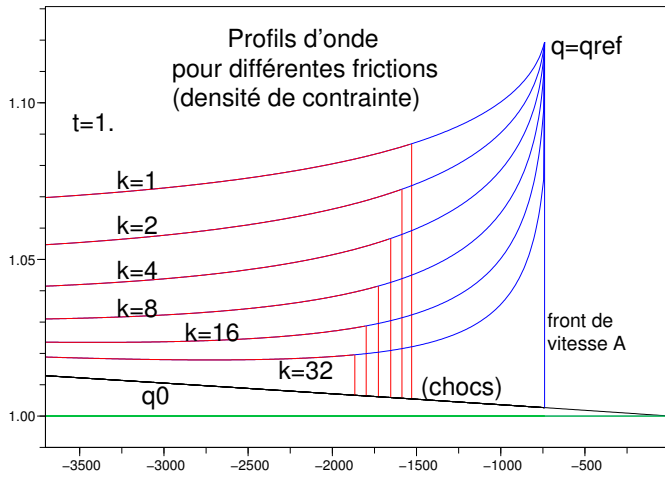
$$1 < \left(\frac{q_{ref}}{\xi} \right)^{\frac{c_0}{\alpha_0}} \frac{q_{ref}}{q_0(z_f)} \sqrt{\frac{q_s}{q_0}}$$

où chaque terme de droite est supérieur à 1 . Dans l'autre sens, il suffit de remarquer que $z'(t)$ est une expression croissante de q_s , pour au moins $q_s \geq q_0$, donc minimale lorsque $q_s = q_0$, d'où

$$z'(t) \geq q_0 Z(q_0, q_0) = c_0 q_0^{\frac{c_0}{\alpha_0}} .$$

Il convient de remarquer que l'inégalité $z'(t) < A$ est très largement vérifiée.

Cette équation peut être intégrée numériquement par la méthode d'Euler (explicite) sans aucune difficulté. Les deux figures ci dessous présentent quelques résultats de tests numériques obtenus par cette méthode, pour des coefficients de friction différents. La première présente les profils de densité de contrainte, et la seconde les profils de pression.



La vitesse A est égale à 2932.5 m/s soit $A = 1.78 c_0$. Le choc au fond de l'océan, situé à -3700 m , correspond à 15 fois la pression à cette profondeur, c'est à dire

$$p_{fond} = 36360000 \text{ pascal} = 363.6 \text{ bars} , \quad p_{ref} = 5.454 \cdot 10^8 \text{ pascal} = 5.454 \text{ kbars} .$$

Ceci correspond aux densités de contrainte

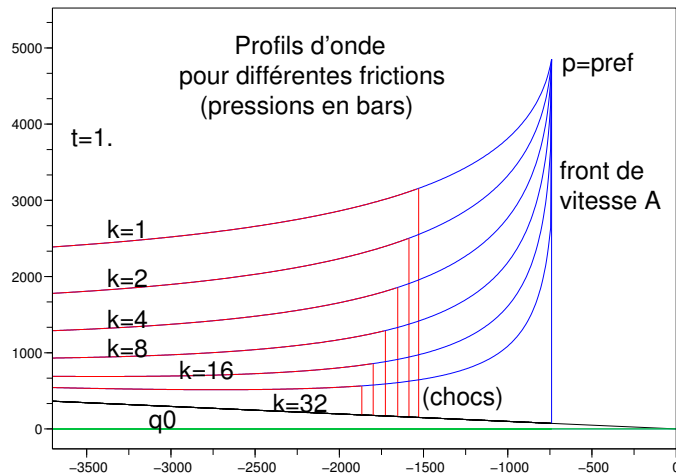
$$q_{fond} = 1.01288 , \quad q_{ref} = 1.1296 .$$

On remarque que la variation de q_{fond} à q_{ref} correspond à une augmentation de 11.5 % qui se traduit par une augmentation de 1400 % en terme de pression. La vitesse des ondes est calculée à partir de

$$c_{ref} = c_0 \frac{c_0}{q_{ref}} = 2629.5 \text{ m/s} , w_{ref} = c_{ref} \frac{q_{ref}}{q_f} = 303 \text{ m/s} .$$

On note que la vitesse c_{ref} ainsi que $A = w_{ref} + c_{ref}$ sont bien plus importantes que c_0 . Les véritables profils sont tracés en rouge, précédés par les chocs respectifs. Les parties de profils éliminées par le choc sont tracées en bleu. On observe une nette différence de la vitesse de propagation des différents fronts d'ondes.

Ce test illustre l'affirmation annoncée plus haut : la friction provoque une onde plus concentrée en amplitude, et cette amplitude est progressivement érodée au cours de sa progression vers la surface. Cette érosion implique également une diminution de la vitesse de propagation du front d'onde.



On constate ainsi que l'amplitude initiale joue un rôle capital : elle doit être très importante pour que subsiste suffisamment d'amplitude à l'arrivée en surface pour provoquer un soulèvement conséquent de cette surface. La question de la valeur du coefficient de friction reste ouverte. Les tests montrent que des valeurs situées entre 1 et 10 sont crédibles. Les valeurs trop grandes impliquent une trop forte concentration du profil, à l'arrière du choc frontal qui, de son côté, s'érode très rapidement ; l'ammortissement est alors trop élevé pour laisser se produire les phénomènes attendus.

7.1.6 La propagation en trois dimensions

Le véritable problème doit être traité en coordonnées cylindriques, dont l'axe central est situé à l'aplomb du centre du séisme, uniformément par rapport à l'angle polaire horizontal. Le soulèvement de la surface de l'océan correspond effectivement à un disque dont le rayon est d'autant plus grand que l'amplitude des ondes est importante, ce qui exige également une densité de contrainte initiale suffisante. Ce rayon du disque soulevé en surface va déterminer la longueur d'onde de la vague qui, si elle est suffisante, va se propager selon le modèle de Saint-Venant.

Nous utiliserons, dans un souci de cohérence, les mêmes notations qu'au Chapitre 6 (section 6.2) pour décrire les coordonnées sphériques, c'est à dire

$$x = r \cos \phi \sin \lambda \quad , \quad y = r \sin \phi \sin \lambda \quad , \quad z = r \cos \phi \quad .$$

Le point $r = 0$ correspond à la source du séisme, ou épicentre, que l'on situe au dessous du fond de l'océan, ce qui signifie que l'impact n'est pas réduit à un point, mais à un disque dont le diamètre est déterminé par la profondeur de cet épicentre. Dans ce système de coordonnées, en reprenant la proposition 6.2.1, l'expression de la divergence d'un vecteur vitesse $V = (u, v, w)$ est donnée par

$$\text{div} V = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial r} + 2 \frac{w}{r} - \tan \phi \frac{v}{r} \quad .$$

On utilise l'indépendance en λ et on néglige la composante transverse v de la vitesse pour ne conserver que la composante radiale w et réduire ainsi cette expression à

$$\text{div} V = \frac{\partial w}{\partial r} + 2 \frac{w}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \quad .$$

On reprend la loi de Hooke, avec la même expression de la vitesse

$$c(p) = \sqrt{1 + \beta_0 p} \quad ,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\rho_0 c_0^2}{r^2} (1 + \beta_0 p) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) = 0 \quad .$$

On multiplie par

$$r^2 \frac{\alpha_0 \beta_0}{2 c_0} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0} - 1}$$

pour obtenir

$$r^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} + w \frac{\partial}{\partial r} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \right) + \frac{\rho_0 c_0^2 \alpha_0 \beta_0}{2 c_0} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) = 0 \quad .$$

On prend pour densité de contrainte

$$q = r^2 (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \quad ,$$

qui a la dimension d'une surface (m^2), et en remarquant que

$$\frac{\rho_0 c_0^2 \alpha_0 \beta_0}{2 c_0} = 1 \quad ,$$

et on obtient l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(qw) = 0 .$$

Le long d'un axe d'incidence ϕ par rapport à l'horizontale, seule la composante radiale de la gravité doit être prise en compte, c'est à dire $g \sin \phi$. Notons que la verticale correspond à $\phi = \frac{\pi}{2}$. L'équation dynamique devient ainsi

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} + \rho_0 g \sin \phi + k |w| w = 0 .$$

On la multiplie par $\frac{q}{\rho_0}$ et on lui ajoute

$$w \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(qw) \right) = 0 ,$$

pour obtenir, en posant $m = qw$,

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2w \frac{\partial m}{\partial r} - w^2 \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + q g \sin \phi + \frac{kq}{\rho_0} |w| w = 0 .$$

Or

$$\frac{r^2}{\rho_0} (1 + \beta_0 p) \frac{z^{\frac{\alpha_0}{2c_0}}}{z} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{r^2}{\rho_0} (1 + \beta_0 p) \frac{2c_0}{\alpha_0 \beta_0} \frac{\partial}{\partial r} (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} ,$$

d'où

$$\frac{r^2}{\rho_0} (1 + \beta_0 p) \frac{z^{\frac{\alpha_0}{2c_0}}}{z} \frac{\partial p}{\partial r} = c_0^2 (1 + \beta_0 p) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \right) - 2r (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \right] ,$$

et on en déduit l'équation dynamique

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2w \frac{\partial m}{\partial r} + (c^2 - w^2) \frac{\partial q}{\partial r} - 2c^2 \frac{q}{r} + g q \sin \phi + \frac{kq}{\rho_0} |w| w = 0 .$$

On remarque que le terme source a été modifié, la quantité $2c^2 \frac{q}{r}$ aura pour influence d'augmenter la valeur de m . Le fait de situer l'épicentre du séisme au dessous du fond de l'océan, par exemple à une distance r_0 a pour conséquence de rendre toujours $r > r_0$ et d'éviter tous les problèmes relatifs à la valeur $r = 0$. En pratique, r_0 dépasse plusieurs kilomètres.

Lorsque la vitesse est nulle et l'équilibre maintenu, l'équation dynamique se réduit à

$$c^2 \frac{\partial q}{\partial r} - 2c^2 \frac{q}{r} + g q \sin \phi = 0 ,$$

où, après simplification,

$$c^2 \frac{\partial q}{\partial r} - 2c^2 \frac{q}{r} = \frac{\alpha_0 \beta_0 c_0^2}{2c_0} r^2 (1 + \beta_0 p)^{\frac{\alpha_0}{2c_0}} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} .$$

En divisant par q , il reste

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + g \sin \phi = 0 .$$

On obtient la pression d'équilibre en intégrant cette équation :

$$p = Cte - \rho_0 g \sin \phi r ,$$

où il reste à fixer la valeur de la constante. On note z_e (< 0) la profondeur de l'épicentre mesuré à partir du fond de l'océan z_f , ce qui donne une profondeur totale $z_e + z_f$ mesurée à partir de la surface l'océan. A une profondeur z donnée, pour un angle ϕ fixé, la valeur de r est déterminée par

$$r = r(z) = \frac{z_e + z_f - z}{\sin \phi} .$$

On en déduit, pour $z = 0$, que la constante est donnée par

$$Cte = p_a + \rho_0 g (z_e + z_f) .$$

La pression à l'équilibre est ainsi exprimée, pour ϕ fixé,

$$p_0(r) = p_a + \rho_0 g (z_e + z_f) - \rho_0 g \sin \phi r , \quad \text{avec} \quad z_e + z_f < r \sin \phi < z_e .$$

On se retrouve exactement dans la même situation que dans la section précédente, en échangeant les rôles de z et r , en remplaçant p_a par $p_a + \rho_0 g (z_e + z_f)$ et g par $g \sin \phi$. En terme de densité de contrainte, l'équilibre correspond à

$$q_0(r) = r^2 (p_a + \rho_0 g (z_e + z_f) - \rho_0 g \sin \phi r)^{\frac{\alpha_0}{2 c_0}} .$$

On recherche des profils d'ondes de vitesse constante A , comme précédemment. On pose

$$\eta = q - q_0(r) , \quad m = A \eta ,$$

d'où $w = A \frac{\eta}{q}$, et

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 .$$

En reportant ces expressions dans l'équation dynamique, il vient

$$\left[c^2 - A^2 + 2A^2 \frac{\eta}{q} - A^2 \frac{\eta^2}{q^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial r} + \left(c^2 - A^2 \frac{\eta^2}{q^2} \right) q'_0 - 2c^2 \frac{q}{r} + gq \sin \phi + \frac{kA^2}{\rho_0 q} |\eta| \eta = 0 .$$

Or

$$-A^2 + 2A^2 \frac{\eta}{q} - A^2 \frac{\eta^2}{q^2} = -A^2 \left(1 - \frac{\eta}{q} \right)^2 = -A^2 \frac{q_0^2}{q^2} .$$

De plus, $q_0(r)$ vérifie

$$c(q_0)^2 q'_0(r) - 2c(q_0)^2 \frac{q_0(r)}{r} + g q_0(r) \sin \phi = q_0(r) \left(\frac{1}{\rho_0} p'_0(r) + g \sin \phi \right) = 0 ,$$

dont on retient

$$q_0'(r) = 2 \frac{q_0}{r} - \frac{g q_0 \sin \phi}{c(q_0)^2} .$$

Il reste donc, après regroupement de termes et multiplication par q^2 ,

$$(c^2 q^2 - A^2 q_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial r} - 2 \frac{c^2 q^2}{r} \eta + g \sin \phi \left(q^3 - \frac{c^2 q^2 - A^2 q_0^2}{c(q_0)^2} q_0 \right) - 2 A^2 \eta^2 \frac{q_0}{r} + \frac{k q A^2}{\rho_0} |\eta| \eta = 0 ,$$

qu'on peut aussi écrire

$$(c^2 q^2 - A^2 q_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial r} - 2 \frac{c^2 q^2}{r} \eta + g \sin \phi q^3 \left(1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^{\frac{2c_0}{\alpha_0} - 1} \right) - 2 A^2 \eta^2 \frac{q_0}{r} + g \sin \phi \frac{A^2 \eta^2 q_0}{c(q_0)^2} + \frac{k q A^3}{\rho_0} |\eta| \eta = 0 ,$$

7.2 La propagation de la vague

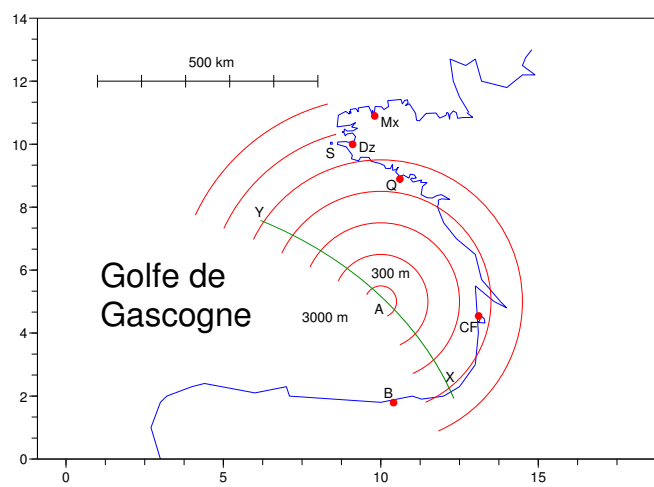
7.2.1 La propagation au large

7.2.2 L'arrivée sur le littoral

7.3 D'autres sources de vagues

7.3.1 Les avalanches sous marines

7.3.2 Les ronds dans l'eau



Chapitre 8

Les ondes de rupture

Ces ondes se particularisent par un changement drastique de l'état du milieu lors du passage d'une onde frontale. Le milieu est préalablement dans un état d'équilibre permanent avant le passage de l'onde. Cet équilibre est rompu au passage de l'onde de rupture, la matière est alors mise en mouvement et vient s'ajouter à la masse en mouvement. Nous allons étudier proposer un cadre général de ces ondes de rupture, puis en illustrer les applications sur quelques exemples qui correspondent à des échelles quelquefois très différentes, de la goutte d'eau de pluie à l'effondrement d'une structure.

8.1 Le modèle de rupture

On désigne par $h(x, t)$ l'état du milieu à l'équilibre. Le plus souvent il s'agit d'une constante par rapport à la variable x et l'équilibre se traduit par

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 .$$

On note $u(x, t)$ le champ de vitesse, qui est bien entendu nul lorsque le milieu est à l'équilibre et par exemple positif lorsque le milieu est en mouvement. On a ainsi une première équation d'advection

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 ,$$

qui est trivialement vérifiée. Cette équation est a priori non conservative. Après le passage de l'onde de rupture, l'état est représenté par $h(x, t) = 0$, pour traduire que le milieu est emporté par l'onde de rupture, et cette équation d'advection reste vérifiée.

On note ensuite $q(x, t)$ la quantité transportée lorsque le milieu est en mouvement par le champ de vitesse u . A cette quantité vient s'ajouter la quantité h au passage de l'onde frontale, sous une forme modifiée, plus compacte, selon un coefficient de compression $\beta > 0$ donné. Ce transport et cet apport sont représentés par l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) + \beta h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Dans cette équation, le terme

$$h \frac{\partial u}{\partial x}$$

correspond à une multiplication de distributions de type $H \delta$, soit une fonction de Heaviside multipliée par une masse de Dirac, qui exige une interprétation particulière pour lever une ambiguïté. En effet, un tel produit est de la forme $\alpha \delta$ où α est un réel à déterminer par un argument extérieur, non décrit par l'équation. Elle pourrait être à première vue levée par le résultat suivant.

Proposition 8.1.1 *La quantité $Q = q + \beta h$ vérifie l'équation de transport*

$$\frac{Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Qu) = 0 .$$

En effet, on le vérifie en calculant

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Qu) = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) + \beta h \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 .$$

Cette équation de transport conduit cependant à une **situation paradoxale**. On considère la trajectoire du front que l'on note $x = x(t)$. Devant le front, on a $Q = \beta h_0$ en notant h_0 l'état du milieu avant la rupture, que l'on peut supposer constant. Derrière le front, on note $Q = q_g$ (on a $h = 0$) et $u = u_g$. La relation de Rankine Hugoniot conduit à l'équation

$$x'(t) (q_g - \beta h_0) = q_g u_g$$

c'est à dire

$$x'(t) = \frac{q_g}{q_g - \beta h_0} u_g > u_g .$$

Ce choc serait plus rapide que le front de rupture. On peut envisager la présence d'un **choc précurseur** mais aucune loi d'état n'ayant été proposée pour l'instant, cette solution reste relativement peu vraisemblable.

L'espace des distributions n'est pas une algèbre, et l'opération de multiplication devient équivoque lorsqu'une masse de Dirac et une fonction discontinue interviennent. L'idée de J.F.Colombeau (voir le chapitre Bibliographie) consiste à considérer une distribution comme une classe d'équivalence d'objets plus fins, appelés des **fonctions généralisées**, qui constituent un espace bien plus grand et qui doit être quotienté correctement pour devenir une algèbre dans laquelle la multiplication n'est plus ambiguë. Des détails supplémentaires sont développés au chapitre 10, et il nous suffit ici de savoir distinguer entre les représentants d'une même distribution, et notamment en ce qui concerne la distribution de Heaviside, ce qui est développé dans la suite.

En notant H un représentant de cette distribution d'Heaviside, on remarque que pour tout entier n , la quantité $K = H^n$ est un autre représentant de la distribution d'Heaviside, tout comme le paroduit $Kh = H^{n+1}$. La dérivée de ce produit est donc égale à la masse de Dirac notée δ . On a

$$(KH)' = K H' + K' H = \delta .$$

Ainsi le résultat correspond à la contribution de chaque produit $K H'$ et $K' H$, ce qui peut s'exprimer en introduisant un coefficient réel α tel que

$$K H' = \alpha \delta , \quad K' H = (1 - \alpha) \delta .$$

Dans le cas où $K = H^n$, on obtient

$$\alpha \delta = K H' = H^n H' \quad , \quad (1 - \alpha) \delta = K' H = n H^{n-1} H' H = n H^n H' = n \alpha \delta \quad .$$

On en déduit

$$(1 - \alpha) \delta = n \alpha \delta \quad , \quad d'où \quad \alpha = \frac{1}{n+1} \quad .$$

On remarque que $\alpha = \frac{1}{2}$ lorsque $n = 1$, c'est à dire $K = H$. Si n tend vers l'infini, la valeur $\alpha = 0$ peut également être atteinte. Dans le cas général, des valeurs $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$ sont également possibles, mais dans le cas monotone (en considérant que H et K sont croissantes) on a toujours

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad .$$

Dans notre modèle, on peut considérer que la vitesse est constante (ceci sera vérifié ultérieurement) et que $h = 0$ après le passage de l'onde de rupture. En notant A la vitesse et h_0 la valeur de h avant le passage de l'onde, on a

$$h(x, t) = h_0 H(a - At) \quad , \quad u(x, t) = A (1 - U(x - At)) \quad ,$$

où H et U sont deux représentants de la distribution d'Heaviside. On note

$$U H' = \alpha \delta \quad (\implies h U' = (1 - \alpha) \delta) \quad .$$

Alors

$$u \frac{\partial h}{\partial x} = A h_0 (1 - U(x - At)) H'(x - At) = A h_0 (1 - \alpha) \delta(x - At) \quad ,$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -A h_0 \delta(x - At) \quad .$$

En reportant dans l'équation d'advection, il vient

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = (-A h_0 + A h_0 (1 - \alpha)) \delta(x - At) = -\alpha A h_0 \delta \quad .$$

On en déduit $\alpha = 0$. Ainsi

$$U H' = 0 \quad , \quad H U' = \delta$$

et donc

$$u \frac{\partial h}{\partial x} = A h_0 \delta(x - At) \quad , \quad h \frac{\partial u}{\partial x} = -h_0 A H(x - At) U'(x - At) = -h_0 A \delta(x - At) \quad ,$$

ce dernier produit apparaissant dans l'équation de transport. Notons que

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu) = u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

ce qui signifie que le flux hu est constant. Le fait d'avoir $\alpha = 1$ signifie ainsi qu'au niveau de l'équation de transport, le milieu est intégralement transformé et mis en mouvement. L'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (qu) + \beta h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

se traduit par

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) = h_0 A \delta(x - At) .$$

On constate que le terme "conservatif" $\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu)$ n'est pas une fonction ordinaire, mais contient une masse de Dirac. Il en va de même pour l'équation de conservation

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Qu) = 0 ,$$

pour laquelle la relation de Rankine Hugoniot ne peut pas s'appliquer, par manque de régularité.

Ceci peut être illustré par le développement suivant. On introduit les approximations respectives de U et H définies ainsi, pour $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ destinés à tendre vers zéro,

$$U_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \epsilon \\ \frac{x}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} , \quad H_\eta = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{x+\eta}{\eta} & \text{si } -\eta \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x < -\eta \end{cases} .$$

On constate que

$$H_\eta(x) U'_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si } 0 < x < \epsilon \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} ,$$

qui converge effectivement vers une masse de Dirac, lorsque ϵ tend vers zéro, ce qui donne à la limite $HU' = \delta$. On remarque également que le produit $U_\epsilon(x) H'_\eta(x)$ reste toujours nul car $H'_\eta(x) = 0$ pour $x > 0$ et $U_\epsilon(x) = 0$ pour $x \leq 0$, indépendamment de ϵ et η , ce qui reste vrai à la limite, d'où la confirmation de la relation $UH' = 0$. En particulier, on peut aussi affirmer que sa dérivée reste nulle

$$(U_\epsilon H'_\eta)' = 0 \quad \text{et à la limite} \quad (UH')' = 0 .$$

On cherche maintenant une solution de l'équation de transport de la forme

$$q(x, t) = q_0 (1 - K(x - At)) + \phi(t) \delta(x - At) ,$$

$$u(x, t) = A (1 - U(x - At)) ,$$

$$h(x, t) = h_0 H(x - At) ,$$

où K est un représentant de la classe des distributions d'Heaviside, q_0 une constante et $\phi(t)$ une fonction à déterminer. Les autres quantités correspondent à celles introduites précédemment. En les reportant dans l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) + \beta h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

on obtient

$$Aq_0 K' + \phi'(t)\delta - A\phi(t)\delta' + Aq_0 (K + U - KU)' + A\phi(t)\delta' - A\phi(t)(\delta U)' - \beta h_0 A H U' = 0 .$$

Cette équation est écrite au niveau des représentants des classes de distribution. Le terme

$$Aq_0 K' + Aq_0 (K + U - KU)'$$

correspond à une masse de Dirac affecté d'un coefficient nul, et disparaît. Si on décide de choisir $\delta = H'$, on obtient

$$\delta U = H'U = 0 .$$

Comme $HU' = \delta$, il reste simplement

$$(\phi'(t) - \beta h_0 A) \delta(x - At) = 0 .$$

On en déduit

$$\phi'(t) = \beta h_0 A \quad , \quad d'o\grave{u} \quad \phi(t) = \beta h_0 A t ,$$

qui représente l'accumulation de matière au niveau du front de rupture. Ce terme d'accumulation explique qu'une relation de Rankine Hugoniot ne puisse pas être appliquée à l'équation de transport. Les traces de la variable q de part et d'autre de la singularité en $x = At$ ne sont pas exploitables du fait de la présence d'une masse de Dirac dans cette singularité.

Ainsi, les ondes de ruptures se caractérisent par une **équation de transport non homogène**, comportant donc un **terme source** qui peut être réduit à une masse de Dirac. Cette équation de transport doit être couplée avec une équation dynamique portant sur le flux, qui est propre à chaque application dans la mesure où l'expression de la vitesse $c(q)$ doit être adaptée à chaque cas. Cette équation dynamique fait intervenir un terme de pression qui va immédiatement régulariser la singularité de type "masse de Dirac" que l'on vient de déceler. par ailleurs, l'équation dynamique doit être compatible avec la situation d'équilibre qui précède l'onde de rupture. Ceci peut être réalisé par un terme de seuil, assurant l'équilibre tant que le seuil n'est pas franchi.

8.2 L'avalanche

Le front d'une avalanche constitue l'exemple type d'onde de rupture. La neige fraîche y est compactée instantanément et vient ensuite s'accumuler dans la masse de neige en mouvement. L'épaisseur de neige fraîche (et encore instable) correspond à h_0 que l'on suppose constante, le coefficient de compression β correspond au taux de compactage de la neige fraîche pour la transformer en neige tassée. La variable q correspond au profil de l'avalanche, c'est à dire au profil de la neige en déplacement. On s'attend à un profil constituée d'une première partie, proche du front, décroissante et qu'on appellera partie frontale, puis d'une seconde partie, croissante, appelée partie dorsale.

On note u la vitesse, et on choisit de compter négativement la pente p afin d'assurer une vitesse non négative. Pour plus de simplicité, on supposera cette pente constante. L'équation de conservation est inchangée, de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) + \beta h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

où h correspond à la hauteur de neige fraîche, telle que

$$h(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{en amont du front d'avalanche (c'est à dire dans l'avalanche)} \\ h_0 & \text{en aval du front d'avalanche (c'est à dire avant le passage du front)} \end{cases} .$$

Le flux m ne concerne que la masse de neige en mouvement. On aura donc

$$m = q u .$$

L'effet de suil consiste à tenir compte du fait qu'un profil de la partie frontale en pente n'est pas suffisant pour entretenir le mouvement. Il faut tenir compte d'une certaine stabilité du tas de neige, qui ne s'écroule que s'il présente un angle suffisant avec l'horizontale. Pour cela on introduit un paramètre μ_0 de stabilité, tel que la mise en mouvement n'est entretenue que si

$$\left| \frac{\partial q}{\partial x} + p \right| > \mu_0 ,$$

ce qui correspond ici à

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p < -\mu_0 ,$$

la pente p étant négative. L'équation dynamique prend la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} - u^2 \frac{\partial q}{\partial x} + gq \operatorname{Inf} \left(0, \frac{\partial q}{\partial x} + p + \mu_0 \right) + k u^\alpha = 0 ,$$

où k est un coefficient de friction et g est la constante de gravité. Lorsque le seuil est dépassé, c'est à dire $\frac{\partial q}{\partial x} + p + \mu_0 < 0$, on retrouve une équation de type "Saint-Venant", avec une pente augmentée, $p + \mu_0$ à la place de p . Les propriétés d'hyperbolicité sont les mêmes, avec les mêmes valeurs propres $\lambda_1 = u - \sqrt{gq}$ et $\lambda_2 = u + \sqrt{gq}$. On n'a pas retenu exactement le terme de friction de Strickler, de la forme $k |u| u$, qui se réduirait ici à $k u^2$ sachant que toujours $u \geq 0$, pour assurer à terme l'arrêt de l'avalanche lorsque le terme de gravité est réduit à zéro, le seuil n'étant plus dépassé. On lui préfère un terme de la forme $k u^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$, qui assure l'arrêt à une distance finie, et même en temps fini pour $\alpha < 1$ strictement.

Lorsque le seuil n'est pas atteint, l'équation dynamique se réduit à

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} - u^2 \frac{\partial q}{\partial x} + k u^\alpha = 0 ,$$

dont la seule valeur propre (double) est $\lambda_1 = \lambda_2 = u$, pour un seul vecteur propre $R = (q, m)$. Comme

$$\nabla \lambda_1 = \left(-\frac{m}{q^2}, \frac{1}{q} \right) \implies \nabla \lambda_1 \cdot R = -\frac{m}{q^2} q + \frac{1}{q} m = 0 ,$$

la valeur propre u est linéairement dégénérée.

Nous allons étudier trois points particuliers : le profil de la partie frontale, le profil de la partie dorsale et enfin la phase d'arrêt.

8.2.1 Le front de l'avalanche

Le seuil d'instabilité est nécessairement franchi, c'est à dire

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p + \mu_0 < 0 .$$

Le système est alors identique à celui de Saint Venant, les seules différences provenant du remplacement de la pente p par $p + \mu_0$ et du terme de friction, en u^α ($0 < \alpha < 1$) plutôt qu'en u^2 . Ces

différences n'affectent que le terme de friction qui ne dépend toujours que de q et de m . La démarche qui aboutit à l'équation de profil reste la même, pour obtenir

$$\frac{B^2 - g q^3}{g (p + \mu_0) q^3 + k u^\alpha q^2} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

où A et B sont des constantes, la vitesse valant $u = A - \frac{B}{q}$. Cette vitesse correspond en particulier à la vitesse du front, où la hauteur de neige en mouvement est réputée nulle, ce qui conduit à la condition $B = 0$, pour éviter une vitesse frontale devenant infinie. L'équation de profil se réduit alors à

$$-\frac{g q}{g (p + \mu_0) q + k A^\alpha} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 .$$

Cette équation s'intègre facilement et sa solution est donnée par

$$q - \frac{k A^\alpha}{g (p + \mu_0)} \ln \left(1 + \frac{g (p + \mu_0) q}{k A^\alpha} \right) = (p + \mu_0) (At - x) ,$$

la constante d'intégration étant fixée par la condition frontale $q = 0$ en $x = At$, position du front. L'avalanche étant située en amont de ce front, on a $x \leq At$.

Au niveau du front d'avalanche, la hauteur de neige q est assez faible pour effectuer un développement limité qui conduit à une expression de la forme

$$q - \frac{k A^\alpha}{g (p + \mu_0)} \left[\frac{g (p + \mu_0) q}{k A^\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{g (p + \mu_0) q}{k A^\alpha} \right)^2 + q^2 \omega(q) \right] = (p + \mu_0) (At - x) ,$$

où $\omega(q)$ est un module de continuité. Après simplification, il ne reste qu'un terme d'ordre deux, de la forme

$$g q^2 \frac{g q^2}{2 k A^\alpha} + q^2 \omega(q) = At - x ,$$

où $\omega(q)$ est un autre module de continuité. Ainsi, au niveau du front, le profil est de la forme

$$q \simeq \sqrt{\frac{2k A^\alpha (At - x)}{g}} ,$$

et présente une pente infinie (en fait $-\infty$) exactement sur la ligne de front. Une remarque intéressante est de constater que le profil frontal est indépendant du terme de pente $p + \mu_0$.

Au delà de la zone frontale, la pente du profil est fortement dépendante du terme de pente $p + \mu_0$, et notamment de son signe. Si $p + \mu_0$ est petit, un développement analogue au précédent conduit à l'expression

$$\frac{g q^2}{2 k A^\alpha} - \frac{g^2 q^3}{3 k^2 A^{2\alpha}} (p + \mu_0) + (p + \mu_0) \omega(p + \mu_0) = At - x ,$$

où $\omega(p + \mu_0)$ est encore un autre module de continuité. On note que si $p + \mu_0 = 0$ le profil est de la forme $q \simeq \sqrt{\frac{2k A^\alpha (At - x)}{g}}$ est conservé, ce qui s'obtient aussi directement de l'équation de profil qui se réduit alors à $q \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{k A^\alpha}{g}$.

Si $p + \mu_0 > 0$, (hypothèse de faible pente), le profil de l'onde frontale rest décroissant, de pente toujours inférieure à $-(p + \mu_0)$ (c'est à dire $\frac{\partial q}{\partial x} < 0$, $|\frac{\partial q}{\partial x}| > p + \mu_0$). Elle ne s'incurve pas et rien ne vient limiter la hauteur de neige en mouvement, au fur et à mesure de l'apport de neige par la compaction frontale, qui vient s'accumuler dans l'avalanche à chaque instant.

Si $p + \mu_0 < 0$, (hypothèse de forte pente), on observe que le dénominateur dans l'équation de profil admet une racine

$$q_* = - \frac{k A^\alpha}{g (p + \mu_0)} ,$$

et la hauteur de neige en mouvement rest limitée par cette valeur q_* , ce qui force l'avalanche à s'étendre en longueur.

8.2.2 Le dos de l'avalanche

8.2.3 La phase d'arrêt

8.3 L'effondrement d'un building

8.4 La goutte d'eau

8.5 Les phénomènes de Flash flooding : pluie cévenole et inondations

8.6 La rupture de barrage sur une pente

8.7 La coulée de boue

Chapitre 9

Les problèmes à fortes contraintes

Ces problèmes induisent un risque très important d'instabilité.

9.1 Les modèles vitesse-pression

9.1.1 Impact en mer

Un véhicule revenant de l'espace va percuter la surface de l'océan. On s'intéresse à l'intensité du champ de vitesse de l'eau près de la paroi de ce véhicule, pour dimensionner par exemple la qualité des éléments attachés : bouées, parachutes, etc...

9.1.2 Les problèmes d'adduction d'eau : repérage des fuites et coup de bélier

Repérage des fuites

La densité de l'eau et sa vitesse du son sont données par

$$\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3} \quad , \quad c_0 = 1647 \text{ ms}^{-1} \quad ,$$

et on se situe à une latitude telle que

$$g = 9.8 \text{ ms}^{-2} \quad .$$

On situe l'étude à une profondeur de côte z_0 (avec $z_0 < 0$) où la pression nominale, c'est à dire à l'équilibre ou à vitesse nulle, est donnée par

$$p_0 = p_{atm} - \rho_0 g z_0 \quad ,$$

où p_{atm} désigne la pression atmosphérique estimée à 1 *bar*, soit 10^5 *Pascals*. On considère un **modèle vitesse-pression**, constituée de l'équation dynamique, portant sur la vitesse notée w ,

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g = 0 \quad ,$$

et de la loi de Hooke portant sur la pression notée p ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Notons que l'on a fait l'hypothèse d'une densité constante ρ_0 qui induit l'hypothèse d'une vitesse du son c_0 constante. De tels modèles sont étudiés en section 4.7. On vérifie immédiatement qu'il s'agit d'un système strictement hyperbolique dont les vitesses caractéristiques sont $w - c_0$ et $w + c_0$. Elles correspondent toutes les deux à des ondes vraiment non linéaires. La loi de Hooke n'est pas conservative, mais il reste possible de déterminer la vitesse des **chocs** en prenant une **courbe d'Hugoniot** particulière, plus précisément ici, une des deux droites :

$$p = p_0 \pm \rho_0 c_0 (w - w_0) ,$$

pour un choc reliant l'état $M_0 = (w_0, p_0)$ à l'état $M = (w, p)$. Les vitesses de choc correspondantes sont

$$x'(t) = \frac{w + w_0}{2} \pm c_0 .$$

On note que ces vitesses de choc ne sont pas constantes, elles dépendent de w .

On s'intéresse maintenant à une **onde de raréfaction** ou **détente**. Comme dans le cas des **ondes sources**, puisque tel est le cas, on pose

$$w = w(p)$$

qu'on remplace dans les équations. La loi de Hooke devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p)) \frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

et l'équation dynamique prend la forme

$$\rho_0 w'(p) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g = 0 ,$$

et on en déduit l'**équation de profil**

$$(1 - \rho_0^2 c_0^2 w'(p)^2) \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g = 0 .$$

Elle est de la forme

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g = 0 ,$$

que l'on peut intégrer par rapport à z . Il vient

$$\psi(p) + \rho_0 g z = \rho_0 g K(t) ,$$

où $K(t)$ (en fait $\rho_0 g K(t)$) correspond à une constante d'intégration (en z). En dérivant maintenant par rapport à t , il vient

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 g K'(t) ,$$

où

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - (w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p)) \frac{\partial p}{\partial z} ,$$

donc

$$\psi'(p) \frac{\partial p}{\partial t} = (w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p)) \rho_0 g ,$$

en utilisant l'équation de profil. Il reste

$$w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p) = K'(t) .$$

On dérive maintenant par rapport à z pour éliminer $K'(t)$. On obtient

$$(w'(p) + \rho_0 c_0^2 w''(p)) \frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

dont on peut écarter l'éventualité

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

s'agissant d'une détente, de pression "non constante" a priori. Il reste l'équation à coefficient constants

$$w'(p) + \rho_0 c_0^2 w''(p) = 0 .$$

On l'intègre pour obtenir une vitesse de la forme

$$w(p) = A - B e^{-\frac{p}{\rho_0 c_0^2}}$$

où A et B sont des constantes d'intégration. En reportant dans

$$w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p) = K'(t) ,$$

on obtient

$$K'(t) = A .$$

On peut maintenant expliciter la fonction de profil :

$$\psi'(p) = 1 - \frac{B^2}{c_0^2} e^{-\frac{2p}{\rho_0 c_0^2}} ,$$

et donc

$$\psi(p) = p + \rho_0 \frac{B^2}{2} e^{-\frac{2p}{\rho_0 c_0^2}} + Cte .$$

On obtient également une relation liant p, z et t ,

$$p + \rho_0 \frac{B^2}{2} e^{-\frac{2p}{\rho_0 c_0^2}} + Cte + \rho_0 g z = \rho_0 g A t .$$

Il reste à déterminer A et B . En injectant

$$w(p) = A - B e^{-\frac{p}{\rho_0 c_0^2}}$$

dans l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (w(p) + \rho_0 c_0^2 w'(p)) \frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

il reste, sachant que

$$w'(p) = \frac{B}{\rho_0 c_0^2} e^{-\frac{p}{\rho_0 c_0^2}} ,$$

l'équation de transport

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

On retrouve une formulation de type (q, m) en introduisant la densité artificielle et le flux associé

$$q = e^{\frac{p}{\rho_0 c_0^2}} , \quad m = q w .$$

On obtient

$$w(p) = A - \frac{B}{q} ,$$

ce qui correspond à la droite

$$m = A q - B ,$$

dans le plan de phase (q, m) , que nous avons chaque fois rencontrée dans le cadre des **ondes sources**. De plus, on retrouve bien l'équation de transport

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} = \frac{q}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 .$$

Les états (w, p) connectables à un état (w_*, p_*) par un choc sont situés sur la droite d'équation

$$w = w_* + \frac{p - p_*}{\rho_0 c_0} ,$$

ce qui se traduit en terme de densité q et flux m par

$$m = q \left(w_* + c_0 \ln \left(\frac{q}{q_*} \right) \right) .$$

On a le résultat suivant :

Proposition 9.1.1 *Dans le plan de phase (q, m) , la courbe de choc est toujours située au dessus de la droite de détente issue de l'état (q_*, m_*) , c'est à dire*

$$q \left(w_* + c_0 \ln \left(\frac{q}{q_*} \right) \right) \geq A_* q - B_* , \quad \text{avec} \quad A_* = w_* + c_0 , \quad B_* = c_0 q_* .$$

On pose $q = \xi q_*$, et il reste à déterminer le signe de l'expression

$$\xi q_* (w_* + c_0 \ln(\xi)) - (w_* + c_0) \xi q_* + c_0 q_*$$

ou après simplifications, de la fonction

$$f(\xi) = \xi \ln(\xi) + 1 - \xi .$$

Sa dérivée vaut

$$f'(\xi) = \ln(\xi),$$

qui est croissante et nulle en $\xi = 1$. Par conséquent $f(\xi)$ est convexe, minimale en $\xi = 1$ où elle est nulle. Donc

$$\forall \xi > 0 \quad , \quad f(\xi) \geq 0 \quad ,$$

d'où la proposition.

9.2 Le comportement des conducteurs en trafic routier

Au paragraphe 2.3.3, un modèle de trafic routier a été proposé, sous la forme d'une seule équation de transport (équation scalaire),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) = 0 \quad ,$$

où q représente la densité du trafic et u sa vitesse. Cette vitesse est limitée par la réglementation routière : une vitesse maximale autorisée v_M est imposée. Elle est aussi limitée par l'encombrement dû à la densité du trafic :

$$u \leq g_0(q) \quad ,$$

où g_0 est une fonction décroissante, concave, nulle lorsque le trafic est complètement saturé, et que la densité de "bouchon", notée ϕ_b est atteinte. On posera ici

$$g(q) = \text{Min}(v_M, g_0(q)) \quad .$$

Cette fonction $g(q)$ représente la vitesse maximale, et dans le modèle scalaire, la vitesse du trafic était identifiée à cette vitesse maximale. La fonction $g(q)$ est constante sur l'intervalle $[0, q_0]$, avec q_0 déterminé par $v_M = g_0(q_0)$, et décroissante sur $[q_0, q_b]$. Il s'agit d'une fonction concave qui présente une singularité en $q = q_0$.

9.2.1 La construction du modèle

En pratique, l'inertie des véhicules et quelques réactions tardives des conducteurs auront tendance à retarder le moment où cette vitesse maximale peut être atteinte lorsque le trafic était auparavant à une vitesse inférieure. L'identification instantanée n'est pas réaliste, et on introduit la **réserve de vitesse** notée

$$w = g(q) - u \quad ,$$

qui est a priori positive (sinon il y a des conducteurs en infraction). L'intention de la majorité des conducteurs sera de réduire et à terme d'annuler cette réserve de vitesse, ce qui correspond à atteindre la vitesse maximale $u = g(q)$, pour ensuite s'y maintenir. On traduit cette intention de la façon suivante, en comparant deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$. Entre ces deux instants, une distance $\Delta x = u \Delta t$ aura été parcourue, et la réserve de vitesse aura été diminuée proportionnellement à Δt et à la réserve de vitesse précédente. On obtient une relation de la forme

$$w(x + u \Delta t, t + \Delta t) = w(x, t) - \beta w(x, t)^\alpha \Delta t + \Delta t \omega(\Delta t) .$$

Le coefficient $\beta > 0$ représente la puissance des véhicules et le paramètre α la "nervosité" de la conduite. Le terme $\omega(\Delta t)$ est un module de continuité, qui disparaîtra lors du passage à la limite. Pour l'instant le paramètre α est simplement supposé positif. Si $\alpha < 1$, on sait que l'état $w = 0$ pourra être atteint au bout d'un temps fini (voir le paragraphe 1.4, sur la boule de pétanque), et ceci d'autant plus vite que α est petit. On verra par la suite qu'une restriction sur ce paramètre α devra être imposée, à savoir $\alpha \leq 1$.

En divisant par Δt , il vient

$$\frac{w(x + u \Delta t, t + \Delta t) - w(x, t)}{\Delta t} = -\beta w(x, t)^\alpha + \omega(\Delta t) ,$$

et en passant à la limite lorsque Δt tend vers zéro, il reste

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = -\beta w(x, t)^\alpha .$$

Pour tenir compte d'infractions éventuelles, on peut introduire une valeur absolue au second membre, traduisant l'intention des conducteurs à revenir dans le "droit chemin". L'équation est alors de la forme

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = -\beta |w(x, t)|^\alpha \operatorname{sgn}(w(x, t)) ,$$

où sgn désigne la fonction "signe". Ainsi, pour $w > 0$, le terme source aura tendance à le faire décroître, et pour $w < 0$, donc en excès de vitesse, le terme source aura tendance à le faire croître, vers zéro.

On est en présence d'un système à deux équations. En utilisant $u = g(q) - w$, on obtient une équation en u (équation dynamique). En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g'(q) \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) .$$

En utilisant l'équation de transport, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + qg'(q)) \frac{\partial u}{\partial x} = \beta |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w) .$$

On pose

$$a = -q g'(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < q_0 \\ -q g'_0(q) & \text{si } q_0 < q < q_b \end{cases} ,$$

en notant qu'on a toujours $a \geq 0$ et que a peut être discontinue en $q = q_0$, et on obtient le système de deux équations, en rappelant l'équation de transport,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} = \beta |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w) \quad .$$

La matrice de flux associée est

$$\begin{pmatrix} u & q \\ 0 & u - a \end{pmatrix} \quad ,$$

qui est triangulaire et dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = u - a \quad , \quad \lambda_2 = u \quad .$$

La valeur propre λ_1 est vraiment non linéaire pour $a > 0$. La valeur propre λ_2 est toujours linéairement dégénérée. Lorsque $a = 0$, c'est à dire pour $q \in [0, q_0]$, la matrice de flux du système n'est pas diagonalisable, et ce système n'est plus strictement hyperbolique.

Il faut aussi remarquer qu'il n'y a pas de valeur propre supérieure à u , ce qui signifie qu'un conducteur ne peut jamais gêner ceux qui le précèdent, mais il peut gêner ceux qui le suivent lorsque le trafic est suffisant ($q \geq q_0$). Le caractère strictement hyperbolique est perdu pour les plus petites valeurs de q , lorsque la circulation est bien fluide. L'intérêt de cette étude porte au contraire sur des trafics proches de la saturation, où l'hypothèse de stricte hyperbolicité est satisfaite.

On introduit le déficit ou flux

$$m = q u \quad ,$$

pour obtenir une équation en m . À partir des deux équations du système, en multipliant l'équation de transport par u et l'équation dynamique par q , on obtient

$$u \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qu) \right) + q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \beta q |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w) \quad ,$$

qui donne

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (2u - a) \frac{\partial m}{\partial x} + u(a - u) \frac{\partial q}{\partial x} = \beta q |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w) \quad .$$

On constate que

$$c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = a = -q g'(q) \quad ,$$

ne dépend que de q ce qui indique que le système est invariant par transformation galiléenne. Cependant

$$u \neq v = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \quad ,$$

et $m \neq qv$, ce qui exprime que **le flux m n'est pas une variable conservative**. Ceci ne doit pas surprendre après une courte réflexion : chaque voiture a sa propre propulsion, ce qui impose au conducteur de se ravitailler de temps en temps à une station service. De ce point de vue, le modèle est très différent d'un modèle hydrodynamique, où les particules sont mises en mouvement par la pression de celles qui les suivent.

9.2.2 Le calcul des profils

On recherche les profils d'onde passant par un point $M_* = (q_*, m_*)$ du plan de phase. On doit distinguer deux cas suivant que $q_* < q_0$ ou $q_* > q_0$.

Dans le premier cas, la vitesse

$$a_* = a(q_*) = -q_* g'(q_*) = 0 ,$$

et les deux valeurs propres sont confondues, égales à v_M , et le système n'est plus strictement hyperbolique. On peut cependant remarquer que l'équation dynamique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + qg'(q)) \frac{\partial u}{\partial x} = \beta |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w)$$

se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \beta |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w)$$

et qu'il s'agit d'une équation scalaire indépendante du trafic q que l'on peut résoudre en utilisant les caractéristiques. Pour simplifier les calculs, on suppose $u < v_M$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$. La caractéristique telle que $u = u_0$ lorsque $x = x_0$, $t = 0$ est solution du système différentiel

$$x'(t) = u , \quad u'(t) = \beta w(t)^\alpha , \quad x(0) = x_0 , \quad u(0) = u_0 .$$

L'équation en u peut se transformer en une équation triviale en $w = v_M - u$, qui s'écrit

$$w'(t) = \beta w(t)^\alpha$$

et dont la solution est

$$w(t) = \left[(v_M - u_0)^{1-\alpha} - \beta (1-\alpha) t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

On en déduit

$$u(t) = v_M - \left[(v_M - u_0)^{1-\alpha} - \beta (1-\alpha) t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

On peut maintenant calculer

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds = x_0 + v_M t + \frac{1}{\beta(2-\alpha)} \left(\left[(v_M - u_0)^{1-\alpha} - \beta(1-\alpha)t \right]^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - (v_M - u_0)^{2-\alpha} \right) .$$

Cette expression donne également

$$x(t) = x_0 + v_M t + \frac{(v_M - u)^{2-\alpha} - (v_M - u_0)^{2-\alpha}}{\beta (1-\alpha)} ,$$

d'où l'expression de la solution $u(x, t)$ de l'équation dynamique

$$u(x, t) = v_M - \left[(v_M - u_0)^{2-\alpha} + \beta(2-\alpha) (x - x_0 - v_M t) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} .$$

On vérifie en effet que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \left[(v_M - u_0)^{2-\alpha} + \beta(1-\alpha) (x - x_0 - v_M t) \right]^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} (v_M - u) = \beta (v_M - u)^{\alpha-1+1} = \beta w^\alpha$$

Il est également intéressant de constater que cette expression de u est une fonction de la quantité $x - v_M t$ et par conséquent une solution de l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_M \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Lorsque $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, les calculs sont légèrement différents, des logarithmes apparaissent, mais on aboutit à la même conclusion concernant l'équation d'advection. Nous verrons par la suite que les valeurs effectives de α restent comprises entre 0 et 1 , c'est à dire $0 < \alpha < 1$.

La vitesse est v_M , constante, et si on recherche une relation de la forme $m = Aq - B$ passant par M_* , on aura $A = v_M$ et

$$B = v_M q_* - m_* = q_* (v_M - u_*) .$$

On identifie u_0 à u_* et en posant

$$u = v_M - \frac{B}{q} ,$$

on obtient

$$q = \frac{B}{v_M - u} = q_* \left(1 + \frac{\beta(2-\alpha)(x - x_0 - v_M t)}{(v_M - u_*)^{2-\alpha}} \right)^{-\frac{1}{2-\alpha}} .$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en intégrant l'équation de profil qui se réduit ici à

$$- \frac{B^2}{\beta q^3 |w|^\alpha \operatorname{sgn}(w)} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

où

$$w = v_M - u = v_M - v_M + \frac{B}{q} = \frac{B}{q} > 0 .$$

Il reste donc

$$- \frac{B^{2-\alpha}}{\beta q^{3-\alpha}} \frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

qui s'intègre en

$$\frac{B^{2-\alpha}}{\beta (2-\alpha) q^{2-\alpha}} = x - x_0 - v_M t + Cte ,$$

et on retrouve l'expression précédente en choisissant

$$Cte = \frac{B^{2-\alpha}}{\beta (2-\alpha) q_*^{2-\alpha}} .$$

9.3 Le traitement numérique : les schémas "équilibre" ou "well balanced"

9.3.1 Les caractéristiques rétrogrades

Application à la striation atmosphérique

Autres applications

Equilibre atmosphérique

Applications en hydraulique

9.3.2 Les schémas à profils stationnaires

9.3.3 La réduction de la diffusion numérique

Méthodes classiques

Méthodes dynamiques

Chapitre 10

Bibliographie

10.1 Développement chapitre par chapitre

10.2 Liste des références